

Peti izpit iz Matematike 1 (UNI)

22. avgust 2018

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa **ni dovoljeno odpirati**, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven **osebni dokument s sliko** in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- **Popolnoma izklopite mobilne telefone** in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak **test morate obvezno oddati**.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Tabela integralov

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \text{za } a > 0 \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Prostornina vrtenine

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Površina plašča vrtenine

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Dolžina loka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

1. naloga (25 točk)

Naj bo A množica tistih kompleksnih števil z , za katera velja $\operatorname{Re}(z - iz) \geq 0$.

a) V kompleksni ravnini nariši množico A .

b) Poišči tista kompleksna števila z , ki ležijo v množici A in rešijo enačbo

$$z^3 = -\frac{2}{1+i}.$$

Rešitev:

a) $A = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \geq -x\}$

b) $z = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}$

2. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = ||x + 1| - 2| \quad \text{in} \quad g(x) = e^x + 1.$$

- a) Določi defincijski območji funkcij f in g .
- b) Nariši grafa funkcij f in g .
- c) Določi zalogi vrednosti funkcij f in g .
- d) Ali je funkcija f injektivna? Ali je funkcija g injektivna?
- e) Poišči predpis za funkcijo $f \circ g$ in ga poenostavi.

Rešitev:

a) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

b)

c) $Z_f = [0, \infty)$, $Z_g = (1, \infty)$

d) Ne. Da.

e) $(f \circ g)(x) = e^x$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \cos x + \frac{\sin^2 x}{2}.$$

- a) Določi enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = \frac{\pi}{2}$.
- b) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) $y = \frac{\pi+1}{2} - x$

- b) Stacionarne točke so pri $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Lokalni maksimumi so pri $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), lokalni minimumi pa pri $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

Izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga omejujejeta x os in tisti del grafa funkcije f , ki leži nad x osjo.

Rešitev: $5 \ln \frac{3}{2} - 2$