

Prvi kolokvij iz Matematike 1

27. november 2018

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Števíla

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\textbf{Diskriminanta: } D = b^2 - 4ac$$

$$\textbf{Ničle: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\textbf{Teme: } T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

Kotne funkcije

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}\end{aligned}$$

Povezave

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x\end{aligned}$$

1. naloga (15 točk)

S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$4 \mid (3^{2n+1} + 5^n) .$$

2. naloga (25 točk)

Poišči vsa realna števila x , ki rešijo neenačbo

$$||x - 2| - |2x + 1|| \leq 1 - x.$$

Rešitev: $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \frac{1}{2}]$

3. naloga (25 točk)

Dana je množica $A = \{z \in \mathbb{C} : |2\bar{z} + 1 - 2i| \leq |z + 2 + i|\}$.

a) V kompleksni ravnini nariši množico A .

b) Poišči tista kompleksna števila z , ki rešijo enačbo $z^3 = i$ in ležijo v množici A .

Rešitev:

a) Krog s središčem $-i$ in polmerom 1.

b) $z = -i$

4. naloga (35 točk)

a) Nariši graf funkcije f s predpisom $f(x) = -4x^3 + 3x - 1$.

b) Dana je funkcija g s predpisom $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Poišči definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije g ter nariši njen graf. Dokaži, da je funkcija g injektivna na množici $(1, \infty)$, poišči $g((1, \infty))$ in predpis za inverzno funkcijo $g^{-1} : g((1, \infty)) \rightarrow (1, \infty)$.

Rešitev:

a) f ima enojno ničlo -1 in dvojno ničlo $\frac{1}{2}$ ter začetno vrednost -1

b) g ima enojno ničlo 0 , enojna pola -1 in 1 ter asimptoto $y = 0$. Graf ne seka asimptote.

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \quad Z_g = \mathbb{R}. \quad g((1, \infty)) = (0, \infty), \quad g^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y} \text{ za } y > 0$$