

Drugi kolokvij iz Matematike 1

19. januar 2018

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1 Tabela osnovnih odvodov

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \quad (3)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \quad (5)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (6)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (7)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

2 Tabela osnovnih integralov

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad \text{za } r \neq -1 \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (11)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (12)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (13)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (14)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C \quad (20)$$

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

a) Za katero vrednost $a \in \mathbb{R}$ je funkcija $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in (-1, \infty) \setminus \{0\} \\ a & : x = 0. \end{cases}$$

zvezna?

b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Rešitev:

a) $a = -\frac{1}{2}$

b) 0

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = xe^{-2x^2}.$$

- a) S pomočjo linearne približka približno izračunaj $f(0.1)$.
- b) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) 0.1

b) Stacionarni točki sta $x = -\frac{1}{2}$ in $x = \frac{1}{2}$. Prva je lokalni minimum, druga pa lokalni maksimum.

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^2 + 2x + 1}.$$

Izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga omejujejeta x os in tisti del grafa funkcije f , ki leži nad x osjo.

Rešitev: $3 \ln 2 - 2$

4. naloga (25 točk)

a) Dokaži, da je $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$.

b) Izračunaj dolžino grafa funkcije $f(x) = -\ln(\cos x)$ nad intervalom $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Rešitev: $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$