

Ponavljjanje

1 Odvodi

1. Izračunaj odvode naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - 2x + 4x^4 - 3 + 4\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = \ln x^2$

(c) $f(x) = e^{-2x} \sin x$

(d) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

(e) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$

(f) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\tan x^2}$

Rešitev:

(a) $-\frac{2}{3x^3} - 2 + 16x^3 + \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

(b) $\frac{2}{x}$

(c) $e^{-2x} (\cos x - 2 \sin x)$

(d) $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(e) $f'(x) = -\frac{x^2-4x+3}{(x^2-3)^2}$

(f) $e^{\sqrt{x}} \frac{\sin x^2 \cos x^2 - 4x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x} \sin^2 x^2},$

2 Integrali

1. Izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int (x^2 + 1)^3 dx$

(b) $\int \left(\frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx$

(c) $\int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx$

(d) $\int (\tan^2 x - \sin x) dx$

(e) $\int (3^x - 5e^x + 4 \cos x) dx$

Rešitev:

(a) $\frac{x^7}{7} + \frac{3x^5}{5} + x^3 + x + C$

(b) $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + x - 2\sqrt{x} + e^x + C$

(c) $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$

(d) $\tan x - x + \cos x + C$

(e) $\frac{3^x}{\ln 3} - 5e^x + 4 \sin x + C$

2.1 Uvedba nove spremenljivke

$$t = f(x) \implies \int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt$$

1. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int x(2x+5)^{10} \, dx$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \, dx$

(b) $\int \sin(3x) \, dx$

(i) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$

(d) $\int \frac{x}{x^4+1} \, dx$

(j) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx$ s pomočjo nove spremenljivke $t = x - 1$

(e) $\int \frac{1}{x(\ln x+1)^2} \, dx$

(f) $\int \frac{e^x}{e^x+2} \, dx$

(k) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \, dx$ s pomočjo nove spremenljivke $t = \sqrt{x}$

(g) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+2} \, dx$

Rešitev:

(a) $\frac{(2x+5)^{12}}{48} - \frac{5(2x+5)^{11}}{44} + C$

(g) $e^x - 2 \ln(e^x + 2) + C$

(b) $-\frac{1}{3} \cos(3x) + C$

(h) $\ln(x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}) + C$

(c) $\frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$

(i) $\frac{(\arcsin x)^3}{3} + C$

(d) $\frac{\arctan x^2}{2} + C$

(j) $\arcsin(x-1)$

(e) $-\frac{1}{\ln x+1} + C$

(k) $2 \arcsin \sqrt{x} + C$

(f) $\ln(e^x + 2) + C$

2. Izračunaj integrale naslednjih funkcij.

(a) $\int \sin x \cos x \, dx$

(c) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(b) $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

(d) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

Rešitev:

(a) $\frac{\sin^2 x}{2} + C$

(c) $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

(b) $\tan x - \frac{1}{\cos x} + C$

(d) $\frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C$

2.2 Integracija per partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \text{oz.} \quad \int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \, dx$$

1. Z uporabo integracije per partes izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int x \sin x \, dx$

(b) $\int x^2 \cos \frac{x}{2} \, dx$

(c) $\int (x^2 - 3) \ln x \, dx$

(d) $\int \arctan x \, dx$

(e) $\int (x^2 + 1) e^{-x} \, dx$

(f) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

Rešitev:

(a) $\sin x - x \cos x + C$

(b) $2(x^2 - 8) \sin \frac{x}{2} + 8x \cos \frac{x}{2} + C$

(c) $(\frac{x^3}{3} - 3x) \ln x - \frac{x^3}{9} + 3x + C$

(d) $x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$

(e) $-(x^2 + 2x + 3) e^{-x} + C$

(f) $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$