

Navadne diferencialne enačbe 1. reda

1. Preveri, da je funkciji $y = \sin x$ in $y = \cos x$ rešita diferencialno enačbo $y'' + y = 0$.
2. Preveri, da je za vsak $c \in \mathbb{R}$ funkcija $y = ce^{2x}$ rešitev diferencialne enačbe $y' = 2y$.
3. Preveri, da je za vsak $c \in \mathbb{R}$ funkcija $y = c \cos(3x)$ rešitev diferencialne enačbe $y' = -3y$.
4. Preveri, da je za vsak $c \in \mathbb{R}$ funkcija $y = c(x - c)^2$ rešitev diferencialne enačbe $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$.

1 Enačba z ločljivima spremenljivkama

1. Reši naslednje diferencialne enačbe

(a) $y' = k(y - y_0); k, y_0 \in \mathbb{R}$,

(d) $yy' = 2x(y + 1); y(0) = 0$,

(b) $y' = -\frac{y}{x}; y(1) = 2$,

(e) $y' = \tan x \tan y$,

(c) $y' = -\frac{y^2}{2x+1}; y(0) = 1$,

(f) $yy' = xe^{x^2+y}; y(0) = 0$.

Rešitev:

(a) $y = y_0 + Ce^{kx}$

(d) $y - \ln|y + 1| = x^2$

(b) $y = \frac{2}{x}$

(e) $\cos x \sin y = C$

(c) $y = \frac{2}{2 + \ln(2x+1)}$,

(f) $2(y + 1)e^{-y} = 3 - e^{x^2}$

2 Uporabne naloge

1. Poišči vse krivulje, ki sekajo vsako od krivulj $y^2 = 2ax$, $a \in \mathbb{R}$, pravokotno.

Rešitev: $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ za $C > 0$

2. Pivo, ki ga damo iz hladilnika, se z začetne temperature 4°C v 10 minutah ogreje na 7°C . Temperatura v sobi je 25°C . Kolikšna bo temperatura piva po 20 minutah?

Pri tem upoštevaj, da se temperatura tekočine spreminja premo sorazmerno z razliko med trenutno temperaturo tekočine in temperaturo okolice.

Rešitev: 9.6°C

3 Homogena enačba

1. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

Rešitev: $y = x \left(\frac{\ln|x|}{2} + C \right)^2$

4 Linearna enačba 1. reda

1. Reši diferencialno enačbo

- (a) $y' + y = x^2$ pri pogoju $y(0) = 0$
- (b) $y' - y = e^{-x}$
- (c) $y' - y = e^x$
- (d) $y' - \frac{3y}{x} = x$
- (e) $y' + 2xy = 2x$ pri pogoju $y(0) = 1$
- (f) $y' + 2xy = 2x^3$
- (g) $y' \cos x + y \sin x = 1$ pri pogoju $y(0) = 1$
- (h) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$
- (i) $xy' + y = \ln x + 1$
- (j) $y' + 2y = \sin(2x) - \cos(2x)$
- (k) $y' + 2y = \sin(2x) - \cos x$

Rešitev:

- | | |
|--|--|
| (a) $y = x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}$ | (g) $y = \sin x + \cos x$ |
| (b) $y = Ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ | (h) $y = \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{C}{\cos x}$ |
| (c) $y = Ce^x + xe^x$ | (i) $y = \frac{C}{x} + \ln x$ |
| (d) $y = Cx^3 - x^2$ | (j) $y = Ce^{-2x} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ |
| (e) $y = 1$; splošna rešitev: $y = Ce^{-x^2} + 1$ | (k) $y = Ce^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{4} \cos(2x)$ |
| (f) $y = Ce^{-x^2} + x^2 - 1$ | |

5 Bernoullijeva enačba

1. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{2yx^4},$$

ki zadošča pogoju $y(1) = 1$.

Rešitev: $y = x^{-\frac{3}{2}}$

2. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

Rešitev: $y = x(\frac{1}{2} \ln |x| + C)^2$

3. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + y = \frac{1-x}{y}.$$

Rešitev: $y^2 = \frac{3-2x+Ce^{-2x}}{2}$

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = x(y + y^2)$.

Rešitev: $y = \frac{1}{Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1}$

5. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = x^3y^2 + xy$.

Rešitev: $y = \frac{1}{2-x^2+Ce^{-\frac{x^2}{2}}}$