

Navadne diferencialne enačbe 2. reda

1 Enačbe, ki se jim lahko zniža red

1. Reši naslednje diferencialne enačbe.

(a) $xy'' = y'$

(b) $xy'' + y' = 0$

(c) $xy'' + y' = -x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(d) $x^2y'' + xy' = 1$

(e) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(f) $(1 + x^2)y'' = 2xy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

Rešitev:

1. (a) $y = Cx^2$

(d) $y = \frac{\ln^2|x|}{2} + C \ln|x| + D$

(b) $y = C + D \ln|x|$

(e) $y = 1 - \frac{x^2}{2}$

(c) $y = -\frac{x^2}{4}$

(f) $y = x^3 + 3x$

2. Kroglo z maso $m = 10g$ izstrelimo navpično v zrak s hitrostjo $100m/s$. Zračni upor povzroča silo, ki je enaka cv^2 , kjer je v hitrost krogle in $c = 2 \cdot 10^{-6}Ns^2/m^2$. Seveda pa na kroglo deluje še sila teže mg , kjer je $g = 10m/s^2$. Po kolikšnem času krogla doseže najvišjo točko in kolikšno višino doseže? Kako pa bi bilo, če ne bi bilo zračnega upora?

Rešitev: $9.4s$, $460m$, $10s$, $500m$

2 Homogena linearna enačba s konstantnimi koeficienti

1. Reši naslednje diferencialne enačbe.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(c) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Rešitev:

(a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

(b) $y = e^{-x} \sin x$

(c) $y = x e^{-2x}$

3 Nehomogena linearna enačba s konstantnimi koeficienti

1. Reši naslednje diferencialne enačbe:

(a) $y'' - y' - 2y = e^x, y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{3}{2}$

(b) $y'' + y' - 2y = e^x$

(c) $y'' - y' - 2y = e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

(d) $y'' - y = e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(e) $y'' + 4y' + 4y = x, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(f) $y'' - 2y' + y = e^x, y(0) = 0, y'(0) = 1$

(g) $y'' - y' - 2y = x e^{2x}$

(h) $y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$

(i) $y'' + y' = x$

(j) $y'' + y' = \sin x$

(k) $y'' + y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(l) $y'' + 9y = \cos(2x)$

(m) $y'' + 9y = \cos(3x)$

(n) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}, y(\frac{\pi}{2}) = 1, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Rešitev:

(a) $y = e^{2x} - \frac{e^x}{2}$

(b) $y = (\frac{x}{3} + C_1) e^x + C_2 e^{-2x}$

(c) $y = \frac{4}{9} e^{2x} + \frac{5-3x}{9} e^{-x}$

(d) $y = \frac{1}{4} e^{-x} + (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) e^x$

(e) $y = \frac{x-1+(x+1)e^{-2x}}{4}$

(f) $y = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^x$

(g) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right) e^{2x}$

(h) $y = C e^{-2x} + D e^x + \frac{(8x^2 - 20x + 13)e^{2x}}{32}$

(i) $y = C_1 e^{-x} + C_2 + \frac{x^2}{2} - x$

(j) $y = C_1 e^{-x} + C_2 - \frac{\cos x + \sin x}{2}$

(k) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{2}$

(l) $y = \frac{1}{5} \cos(2x) + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$

(m) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{x}{6} \sin(3x)$

(n) $y = (\frac{\pi}{2} - x) \cos x + (\ln |\sin x| + 1) \sin x$

4 Nihanje

- Nihanje uteži na vzmeti: $m\ddot{x} + kx = 0$, kjer je k je prožnostni koeficient vzmeti in m masa vzmeti.

- Dušeno nihanje uteži: $\ddot{x} + 2c\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, kjer je $k > 0$ je prožnostni koeficient vzmeti, $m > 0$ masa vzmeti in $c > 0$ koeficient dušenja.
 - Vsiljeno nihanje uteži: $m\ddot{x} + kx = f(t)$, kjer je k je prožnostni koeficient vzmeti, m masa vzmeti, f pa zunanja sila, ki deluje na vzmet.
1. Utež z maso 1kg je pripeta na vzmeti s prožnostnim koeficientom $k = 9\frac{N}{m}$ in niha dušeno s koeficientom dušenja 1. Utež izmaknemo iz ravnovesne lege za 10cm in jo spustimo. Koliko je oddaljena od ravnovesne lege po 1s?

Rešitev: $1.99cm$

2. Utež z maso 0.5kg je pripeta na vzmeti s prožnostnim koeficientom $k = 2\frac{N}{m}$. Na utež delujemo z zunanjo silo $f(t) = 3\cos(\omega t)$. Kako se giba utež po tem, ko jo izmaknemo iz ravnovesne lege za 5cm in jo spustimo, če je

a) $\omega = 1\text{Hz}$,

b) $\omega = 2\text{Hz}$?

Rešitev:

a) $x(t) = 2\cos t - \frac{39}{20}\cos 2t$

b) $x(t) = \frac{1}{20}\cos 2t + \frac{3}{2}t\sin 2t$