

Funkcije več spremenljivk

1 Definijsko območje in grafi

1. Določi definijsko območje in zalogo vrednosti funkcij f podanih z naslednjimi predpisi. Definijsko območje tudi nariši.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

(c) $f(x, y) = \arcsin(2x - y)$

(b) $f(x, y) = \ln(x + y)$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

Rešitev:

(a) $D_f = (-\infty, -2] \times [-2, 2] \cup [2, \infty) \times [-2, 2], Z_f = [0, \infty)$

(b) $D_f = \{(x, y) : y > -x\}, Z_f = \mathbb{R}$

(c) $D_f = \{(x, y) : 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}, Z_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(d) $D_f = \{(x, y) : x \geq 0, y > \sqrt{x}\}, Z_f = (0, \infty)$

2. Določi in nariši definijsko območje podanih z naslednjimi predpisi.

(a) $f(x, y) = \arctan \sqrt{2x + y} + \cos^2(1 + xy) - (1 + x^2)^{\frac{1}{y}}$

(b) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x} + \sqrt{2x - x^2 - y^2}$

Rešitev:

(a) $D_f = \{(x, y) : y \geq -2x, y \neq 0\}$

(b) $D_f = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq x, x \neq 0\}$

3. Nariši nivojnice naslednjih funkcij.

(a) $f(x, y) = x^2 y$

(c) $f(x, y) = (1 + x + y)^2$

(b) $f(x, y) = x + y$

4. Nariši grafe naslednjih funkcij.

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{2 - x^2 - y^2}$

(d) $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$
 (f) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$

(g) $f(x, y) = 1 - x + 2y$

2 Limite in zveznost

1. Izračunaj limito $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

Rešitev: 2

2. Določi takšna števila d , da bo funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ podana z naslednjim predpisom zvezna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ d & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rešitev:

(a) $d = 1$

3 Parcialni odvodi

1. Izračunaj parcialne odvode prvega in drugega reda funkcij f , podanih z naslednjimi predpisi.

(a) $f(x, y) = x^3 - x + 2xy^2 - y^4$

(d) $f(x, y) = y \arctan(xy)$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x + y^2 - y$

(e) $f(x, y) = e^{-x} (x - y^2)$

(c) $f(x, y) = \arcsin(2x - y)$

(f) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(xy)}$

Rešitev:

(a) $f_x = 3x^2 - 1 + 2y^2, f_y = 4xy - 4y^3, f_{xx} = 6x, f_{xy} = 4y, f_{yy} = 4x - 12y^2$

(b) $f_x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, f_y = -\frac{x}{y^2} + 2y - 1, f_{xx} = \frac{1}{x^2}, f_{xy} = -\frac{1}{y^2}, f_{yy} = 2 + \frac{2x}{y^3}$

(c) $f_x = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}, f_y = -\frac{1}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}, f_{xx} = \frac{4(2x-y)}{(1-(2x-y)^2)^{\frac{3}{2}}}, f_{xy} = -\frac{2(2x-y)}{(1-(2x-y)^2)^{\frac{3}{2}}}, f_{yy} = \frac{2x-y}{(1-(2x-y)^2)^{\frac{3}{2}}}$

(d) $f_x = \frac{y^2}{1+x^2y^2}, f_y = \arctan(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2}, f_{xx} = -\frac{2xy^4}{(x^2y^2+1)^2}, f_{xy} = \frac{2y}{(x^2y^2+1)^2}, f_{yy} = \frac{2x}{(x^2y^2+1)^2}$

(e) $f_x = e^{-x}(-x + y^2 + 1), f_y = -2ye^{-x}, f_{xx} = e^{-x}(x - y^2 - 2), f_{xy} = 2ye^{-x}, f_{yy} = -2e^{-x}$

(f) $f_x = -\frac{1}{x \ln^2(xy)}, f_y = -\frac{1}{y \ln^2(xy)}, f_{xx} = \frac{\ln(xy)+2}{x^2 \ln^3(xy)}, f_{xy} = \frac{2}{xy \ln^3(xy)}, f_{yy} = \frac{\ln(xy)+2}{y^2 \ln^3(xy)}$

4 Tangentna ravnina

Tangentne ravnine na graf funkcije f v točki (x_0, y_0) ima enačbo

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

1. Določi enačbo tangentne ravnine

- (a) na graf funkcije $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ v točki $(1, 1, f(1, 1))$,
- (b) na graf funkcije $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ v točki $(0, 2, f(0, 2))$,
- (c) na graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v točki $(0, 1, f(0, 1))$,
- (d) na enotsko sfero v točki $(0, 0, 1)$.

Rešitev:

- (a) $z = 2x + 4y - 3$
- (b) $x - y + z = 0$
- (c) $z = y$
- (d) $z = 1$

5 Linearni približki

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1. Izračunaj linearne približke naslednjih funkcij v dani točki.

- (a) $f(x, y) = x^2 + y$ v $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
- (b) $f(r, \varphi) = r \cos \varphi$ v $(r_0, \varphi_0) = (1, \pi)$

Rešitev:

- (a) $f(x, y) \approx \frac{x}{2} + y - \frac{1}{16}$
- (b) $f(r, \varphi) \approx -r$

2. S pomočjo linearnega približka približno izračunaj naslednje vrednosti.

- (a) $e^{0.02} \cdot 0.97$
- (b) $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$

Rešitev:

- (a) 0.99
- (b) 0.005

3. S pomočjo linearnega približka približno izračunaj ploščino kvadrata, ki ima za stranico diagonalo pravokotnika s stranicama 3.03cm in 3.97cm .

Rešitev: 24.94cm^2

6 Gradient

Za funkcijo f spremenljivk x, y, z je

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} f.$$

1. Izračunaj gradient:

- a) funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ v točki $(2, -2, 1)$,
- b) funkcije $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^3$ v točki (x, y, z) ,
- c) funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v točki (x, y, z) .

Rešitev:

- a) $(4, -4, 2)$
- b) $(2xy^2z^3, 2x^2yz^3, 3x^2y^2z^2)$
- c) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$

2. Izračunaj kot med gradientoma funkcije $u(x, y) = \ln \frac{y}{x}$ v točkah $(2, 1)$ in $(1, 1)$.

Rešitev: $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$

7 Smerni odvod

Če je $\vec{n}$ enotski vektor, potem je *smerni odvod* funkcije f v smeri vektorja $\vec{n}$ enak

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \text{grad}(f).$$

1. Izračunaj smerni odvod funkcije $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ v točki $(2, 0)$ v smeri vektorja $(1, 0)$.

Rešitev: 1

2. Izračunaj smerni odvod funkcije $f(x, y) = \arctan(xy)$ v točki $(1, 1)$ v smeri simetrale prvega kvadranta.

Rešitev: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8 Stacionarne točke in lokalni ekstremi

Točka (x_0, y_0) je *stacionarna*, če je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka in

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} (x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2.$$

Potem:

- Če je $D < 0$, potem f pri (x_0, y_0) nima lokalnega ekstrema,
 - Če je $D > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, potem ima f pri (x_0, y_0) lokalni maksimum,
 - Če je $D > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, potem ima f pri (x_0, y_0) lokalni minimum.
1. Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcij f , podanih z naslednjimi predpisi.
- | | |
|---|--|
| (a) $f(x, y) = x^2 - x + xy - y^2$ | (e) $f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{2x}{y} - y$ |
| (b) $f(x, y) = e^{-x}(x - y^2)$ | (f) $f(x, y) = (x - y) \ln(x + y)$ |
| (c) $f(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x + y^2 - y$ | (g) $f(x, y) = \frac{x-2}{x^2+y^2-3}$ |
| (d) $f(x, y) = (x - y)(x + y)(y - 1)$ | |

Rešitev:

- (a) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ je edina stacionarna točka in ni lokalni ekstrem.
- (b) $(1, 0)$ je edina stacionarna točka in je lokalni maksimum.
- (c) Edina stacionarna točka je $(1, 1)$, ki je lokalni minimum.
- (d) Stacionarne točke so $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$ in $(0, \frac{2}{3})$. Lokalni ekstrem je le zadnja, ki je lokalni maksimum.
- (e) Edina stacionarna točka je $(-2, 2)$, ki je lokalni maksimum.
- (f) Edina stacionarna točka je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ki ni lokalni ekstrem.
- (g) Stacionarni točki sta $(1, 0)$ in $(3, 0)$. Prva je lokalni minimum, druga pa lokalni maksimum.
2. Na grafu funkcije f s predpisom $f(x, y) = 4 - x + 2y$ poišči točko, ki je najbližja točki $(-1, 0, -1)$.

Rešitev: $(0, -2, 0)$

9 Globalni ekstremi

1. Določi globalne ekstreme:
- (a) funkcije $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3x + 2y - 1$ na trikotniku z oglišči $A(-1, 0)$, $B(0, 0)$, $C(0, 2)$,
- (b) funkcije $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2y$ na trikotniku z oglišči $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$,
- (c) funkcije $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ na kvadratu z oglišči $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$,
- (d) funkcije $f(x, y) = x^2 - x + y^2 - y$ na krogu z enačbo $x^2 + y^2 \leq 1$,
- (e) funkcije $f(x, y) = x^3 + 2x^2 + xy + y - 1$ na liku, ki je omejen z abscisno osjo in s parabolo $y = 1 - x^2$.

Rešitev:

(a) Min: $(0, 2)$; max: $(0, \frac{1}{2})$.

(b) Min: $(\frac{6}{7}, \frac{4}{7})$; max: $(0, 2)$.

(c) Min: oglišča A, B, C, D ; max: $(0, 0)$.

(d) Min: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; max: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

(e) Min: $(0, 0)$; max: $(1, 0)$.

2. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ na krogu $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$.

Rešitev: $\frac{\pi}{6}$ in $-\frac{\pi}{6}$