

Dvojni in trojni integrali

1 Dvojni integrali

1.1 Dvojni integrali v kartezičnih koordinatah

1. Izračunaj.

- (a) Integral funkcije $f(x, y) = x + y^2$ po pravokotniku z oglišči $(1, -3)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ in $(2, -3)$.
- (b) Integral funkcije $f(x, y) = x \ln y$ po pravokotniku z oglišči $(0, 1)$, $(0, e)$, $(4, e)$ in $(4, 1)$.
- (c) Integral funkcije $f(x, y) = x \sin(x + y)$ po pravokotniku $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
- (d) Integral funkcije $f(x, y) = x + 3y^2$ po paralelogramu z oglišči $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ in $(2, 5)$.
- (e) Integral funkcije $f(x, y) = \cos x \cos y$ po trikotniku z oglišči $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- (f) Integral funkcije $f(x, y) = 3y - x$ po trapezu z oglišči $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 3)$ in $(2, 3)$.
- (g) $\int_2^4 dy \int_x^{2x} \frac{y}{x} dx$
- (h) $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$
- (i) Integral funkcije $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ po območju, ki je omejeno s premicama $x = 2$, $y = x$ in hiperbolo $y = \frac{1}{x}$.

Rešitev:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (a) 27 | (f) 12 |
| (b) 8 | (g) 9 |
| (c) $\pi - 2$ | (h) $\frac{1}{2}$ |
| (d) 79 | (i) $\frac{9}{4}$ |
| (e) $\frac{1}{2}$ | |

2. Izračunaj maso in težišče plošče, ki je omejena s parabolama $y = x^2$ in $x = y^2$, njena gostota je pa $\rho(x, y) = x$.

Rešitev: $m = \frac{3}{20}$, $T(\frac{4}{7}, \frac{5}{9})$

3. Izračunaj maso trikotne plošče

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\},$$

če je gostota v točki (x, y) dana z $\rho(x, y) = e^{-x-y}$.

Rešitev: $1 - 4e^{-3}$

4. Izračunaj maso homogene plošče, ki je omejena s krivuljama $y^2 = 4x+4$ in $y^2 = -2x+4$.

Rešitev: 8

5. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 2x$ in $y^2 + 4y = 2x$.

Rešitev: $\frac{9}{4}$

6. Zamenjaj vrstni red integracije v integralih.

(a) $\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy$

(d) $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy$

(b) $\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy} dy$ za $0 < a \leq b$

(c) $\int_0^4 dx \int_{3x}^{12x} f(x, y) dy$

(e) $\int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx$

Rešitev:

(a) $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 f(x, y) dx$

(b) $\int_a^b dy \int_0^\infty e^{-xy} dx = \ln \frac{b}{a}$

(c) $\int_0^{12} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\frac{y}{3}} f(x, y) dx + \int_{12}^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\frac{y}{4}} f(x, y) dx$

(d) $\int_{e^{-1}}^1 dy \int_{-\ln y}^1 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx$

(e) $\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{4y+4}}^{\sqrt{4y+4}} f(x, y) dx \right) dy + \int_0^8 \left(\int_{-\sqrt{4y+4}}^{2-y} f(x, y) dx \right) dy$

1.2 Uvedba novih spremenljivk

1. Z uvedbo ustreznih novih koordinat izračunaj integral funkcije $f(x, y) = y - x$ po paralelogramu z oglišči $(1, 2)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ in $(3, 4)$.

Rešitev: -8

2. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^2}$, $y = x$ in $y = 3x$.

Rešitev: $\frac{3}{2} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \left(3^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$

3. Naj bosta $a, b > 0$ in naj bo D četrtina elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ v prvem kvadrantu.

(a) Izračunaj spodnje integrale s pomočjo uvedbe novih koordinat (r, φ) , kjer je $x = ar \cos \varphi$ in $y = br \sin \varphi$

i. $\iint_D x dx dy$

- ii. $\iint_D xy \, dx \, dy$
- iii. $\iint_D x^2 \, dx \, dy$

(b) Določi maso in koordinate težišča lika D , če je gostota podana z $\rho(x, y) = x$.

Rešitev:

- (a) i. $\frac{a^2b}{3}$
- ii. $\frac{a^2b^2}{8}$
- iii. $\frac{\pi a^3b}{16}$

(b) $m = \frac{a^2b}{3}, x_T = \frac{3\pi a}{16}, y_T = \frac{3b}{8}$

1.3 Dvojni integrali v polarnih koordinatah

1. Izračunaj ploščino kroga s polmerom $R > 0$.

Rešitev: πR^2

2. Izračunaj $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, kjer je D kolobar med krožnicama $x^2 + y^2 = 1$ in $x^2 + y^2 = 4$.

Rešitev: $\frac{15\pi}{2}$

3. Izračunaj težišče homogene plošče v obliki krožnega izseka $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Rešitev: $m = \frac{\pi}{4}, T\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$

4. Naj bo D območje v polravnini $y \geq 0$, ki ga omejujejo krožnica z enačbo $x^2 + y^2 = 1$ in premici $y = x$ ter $y = x\sqrt{3}$. Izračunaj

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Rešitev: $\frac{\pi}{36}$

5. Izračunaj

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} \, dx \, dy,$$

kjer je D območje v prvem kvadrantu, ki ga omejujejo krožnici $x^2 + y^2 = 1$ ter $x^2 + y^2 = 9$ in premici $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ter $y = \sqrt{3}x$.

Rešitev: $\frac{\pi^2}{6}$

6. Izračunaj

$$\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

kjer je $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Rešitev: 0

7. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ in $y = 0$.

Rešitev: $\frac{3(\pi+2)}{4}$

8. Naj bo D območje v ravnini, ki ga omejuje krivulja z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Izračunaj

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy.$$

Rešitev: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

2 Trojni integrali

2.1 Trojni integrali v kartezičnih koordinatah

1. Izračunaj integral funkcije $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + yz^2$ po kvadru $[0, 2] \times [1, e] \times [3, 6]$.

Rešitev: $63e^2 - 57$

2. Izračunaj maso in koordinate težišča telesa, ki ga določajo neenačbe

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq xy$$

in ima gostoto $\rho(x, y, z) = x^2y$.

Rešitev: $m = \frac{1}{21}, \quad T\left(\frac{7}{8}, \frac{21}{32}, \frac{7}{24}\right)$

3. Izračunaj

$$\iiint_V (1 - x) \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je V območje v prvem oktantu, omejeno z ravnino $x + y + z = 1$.

Rešitev: $\frac{1}{8}$

2.2 Trojni integrali v cilindričnih koordinatah

1. Izračunaj volumen telesa omejenega s ploskvama $2z = x^2 + y^2$ in $z = 2$.

Rešitev: 4π

2. Izračunaj volumen telesa omejenega s paraboloidom $z = x^2 + y^2$ in stožcem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rešitev: $\frac{\pi}{6}$

3. Izračunaj volumen telesa, ki je določeno z enačbami $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$ in $z \geq 0$.

Rešitev: $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

2.3 Trojni integrali v sferičnih koordinatah

1. Izračunaj prostornino krogle s polmerom $R > 0$.

Rešitev: $\frac{4\pi R^3}{3}$

2. Izračunaj težišče polkrogle nad xy -ravnino z radijem R in gostoto $\rho(x, y, z) = z$.

Rešitev: $(0, 0, \frac{8R}{15}); m = \frac{\pi R^4}{4}$

3. Izračunaj težišče dela enotske krogle, ki leži v prvem oktantu.

Rešitev: $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}); m = \frac{\pi}{6}$

4. Izračunaj integral funkcije $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ po telesu, ki ga določa neenačba $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$.

Rešitev: π .