

Drugi izpit iz Matematike 2 (GIK, NTO)

1. julij 2019

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Adicijski izreki

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Defaktorizacija

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

Dvojni in polovični koti

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

Diferencialne enačbe

Ločljivi spremenljivki: $y' = f(x)g(y)$

$$\bullet \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Linearna 1. reda: $y' + p(x)y = q(x)$

$$\text{HD: } y' + p(x)y = 0, y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

$$\text{VK: } y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$$

Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^r; r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\bullet z = y^{1-r} \implies z' = (1-r)y^{-r}y'$$

Lin. 2R, konst. koef.: $ay'' + by' + cy = f(x)$

$$\bullet a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0: y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$D = 0: y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$$

$$D < 0: \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i; y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\bullet y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \Delta_1 = \\ \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{f}{a} & y_2' \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{f}{a} \end{vmatrix}, u_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ u_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

- $f(x) = p(x)e^{\mu x}: y_P = x^s q(x)e^{\mu x}$
- $f(x) = p(x) \cos(\mu x)$ ali $p(x) \sin(\mu x):$
 $y_P = x^s q(x) (A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x))$

Odvodi

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Tangentna ravnina, linearni približek:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Stacionarne točke in lokalni ekstremini:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Integrali

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Prostornina vrtenine: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

Površina plašča vrtenine: $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

Dolžina loka: $l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

Masa in težišče:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

$$x_T = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \quad y_T = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy$$

Polarne koordinate:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad J(r, \varphi) = r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Cilindrične koordinate:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$J(r, \varphi, z) = r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}.$$

- a) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .
- b) Nariši graf funkcije f .

Rešitev:

- a) Stacionarna točka je pri $x = 4$ in je lokalni maksimum.
- b) Enojni ničli sta pri $x = -2$ in $x = 1$, dvojni pol je pri $x = 0$, asimptota je $y = 1$.

2. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + y = x^2,$$

ki zadošča pogojem $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: $y = x^2 - 2 + 2 \cos x$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x - 4y}.$$

- a) Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije f v točki $(1, 0, f(1, 0))$.
- b) Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) $z = -x + 5y + 2$

- b) Edina stacionarna točka je $(-1, \frac{1}{4})$, ki ni lokalni ekstrem.

4. naloga (25 točk)

Izračunaj maso telesa, ki je omejeno s stožcem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ in paraboloidom $z = x^2 + y^2$ ter ima gostoto $\rho(x, y, z) = z + 1$.

Rešitev: $\frac{\pi}{4}$