

## Tretji izpit iz Matematike 2 (GIK, NTO)

3. september 2019

Ime in priimek \_\_\_\_\_

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

|          |  |
|----------|--|
| 1        |  |
| 2        |  |
| 3        |  |
| 4        |  |
| $\Sigma$ |  |

## NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

## Adicijski izreki

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

## Defaktorizacija

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

## Dvojni in polovični koti

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

## Vrednosti kotnih funkcij

| $\theta \rightarrow$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin \theta$        | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \theta$        | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \theta$        | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | /               |

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

## Diferencialne enačbe

**Ločljivi spremenljivki:**  $y' = f(x)g(y)$

$$\bullet \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

**Linearna 1. reda:**  $y' + p(x)y = q(x)$

$$\textbf{HD: } y' + p(x)y = 0, y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

$$\textbf{VK: } y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$$

**Bernoulli:**  $y' + p(x)y = q(x)y^r; r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\bullet z = y^{1-r} \implies z' = (1-r)y^{-r}y'$$

**Lin. 2R, konst. koef.:**  $ay'' + by' + cy = f(x)$

$$\bullet a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0: y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$D = 0: y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$$

$$D < 0: \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i; y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\bullet y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{f}{a} & y_2' \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{f}{a} \end{vmatrix}, u_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ u_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

- $f(x) = p(x)e^{\mu x}: y_P = x^s q(x)e^{\mu x}$
- $f(x) = p(x) \cos(\mu x)$  ali  $p(x) \sin(\mu x):$   
 $y_P = x^s q(x) (A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x))$

## Odvodi

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

**Tangentna ravnina, linearni približek:**

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Stacionarne točke in lokalni ekstremini:**

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

## Integrali

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

**Prostornina vrtenine:**  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

**Površina plašča vrtenine:**  $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

**Dolžina loka:**  $l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$

**Masa in težišče:**

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

$$x_T = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \quad y_T = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy$$

**Polarne koordinate:**

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad J(r, \varphi) = r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

**Cilindrične koordinate:**

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$J(r, \varphi, z) = r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

**1. naloga (25 točk)**

Dana je funkcija  $f$  s predpisom

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}.$$

- a) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije  $f$ .
- b) Nariši graf funkcije  $f$ .

**Rešitev:**

- a) Stacionarni točka sta pri  $x = \frac{1}{2}$  in  $x = 2$ . Prva je lokalni maksimum, druga pa lokalni minimum.
- b) Dvojna ničla je pri  $x = 2$ , enojna pola sta pri  $x = -1$  in  $x = 1$ , asimptota je  $y = 1$  in seka graf pri  $x = \frac{5}{4}$ .

**2. naloga (25 točk)**

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' + 2y = x,$$

ki zadošča pogoju  $y(0) = 0$  in  $y'(0) = 0$ .

**Rešitev:**  $y = \frac{1}{2}(x + 1 - e^x \cos x)$

### 3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija  $f$  s predpisom

$$f(x, y) = xy e^{x-y}.$$

- a) Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije  $f$  v točki  $(1, 1, f(1, 1))$ .
- b) Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije  $f$ .

**Rešitev:**

a)  $z = 2x - 1$

- b) Stacionarni točki sta  $(-1, 1)$  in  $(0, 0)$ . Prva je lokalni minimum, druga pa ni lokalni ekstrem.

**4. naloga (25 točk)**

Izračunaj prostornino telesa, ki je omejeno s ploskvama  $z = x^2 + y^2 - 2$  in  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Rešitev:**  $\frac{5\pi}{6}$