

Šesti izpit iz Matematike 2 (GIK, NTO)

5. september 2018

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Tabela integralov

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \text{za } a > 0 \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Polarne koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad J(r, \varphi) = r, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Cilindrične koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \\ J(r, \varphi, z) &= r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Sferične koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \\ J(r, \varphi, \theta) &= r^2 \cos \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \\ \tan \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

1. naloga (25 točk)

Dani je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}.$$

- a) Določi definicijsko območje funkcije f .
- b) Ali je funkcija f soda ali liha?
- c) Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .
- d) Nariši graf funkcije f .

Rešitev:

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Niti soda niti liha.
- c) Edina stacionarna točka je $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ki je lokalni maksimum.

2. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - y' - 2y = e^{-x},$$

ki zadošča pogojem $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: $y = \frac{4}{9}e^{2x} + \frac{5-3x}{9}e^{-x}$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = y \sin(x - y).$$

- a) Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije f v točki $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$.
- b) Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) $z = \frac{\pi}{2}(x - y)$

- b) Stacionarne točke so $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Nobena od njih ni lokalni maksimum.

4. naloga (25 točk)

Izračunaj maso in težišče plošče z gostoto $\rho(x, y) = x - y + 1$, ki ima obliko paralelograma z oglišči $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(3, 1)$ in $(1, 1)$.

Rešitev: $m = 8$, $T\left(\frac{7}{6}, 0\right)$