

Rešitve in kriterij ocenjevanja 1. kolokvija iz Matematike 2

1. [10] Z metodo bisekcije poišči rešitev enačbe

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

na eno decimalno natančno.

Rešitev: Označimo $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Potem je $p(0) = -1$ in $p(1) = 1$, od koder sledi, da je nekje na intervalu $[0, 1]$ rešitev dane enačbe.

Začeli bomo torej z intervalom $[0, 1]$. Sedaj bomo postopoma ta interval razpolavljali:

- $p(0.5) = 0.125$, zato bo ničla na intervalu $[0, 0.5]$,
- $p(0.3) = -0.253$, zato bo ničla na intervalu $[0.3, 0.5]$,
- $p(0.4) = -0.056$, zato bo ničla na intervalu $[0.4, 0.5]$.

Približek za rešitev enačbe je $x = 0.4$.

□

- [2] Začetni interval.
- [6] Po dve točki za vsak korak bisekcije.
- [2] Rezultat.

2. [15] Dana je funkcija $f(x) = e^{x+2} + 1$. Izračunaj predpis za njen inverz in nato v isti koordinatni sistem skiciraj grafa funkcije f in njenega inverza.

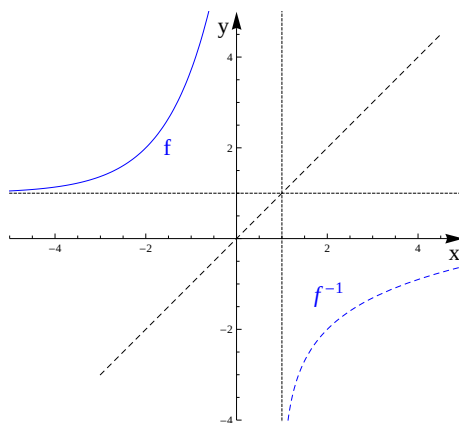
Rešitev: Računajmo:

$$\begin{aligned}y &= e^{x+2} + 1, \\y - 1 &= e^{x+2}, \\\ln(y - 1) &= x + 2, \\x &= \ln(y - 1) - 2.\end{aligned}$$

Tako dobimo predpis za inverzno funkcijo

$$f^{-1}(x) = \ln(x - 1) - 2.$$

Poglejmo si še grafa funkcije in inverzne funkcije.



□

- [5] Predpis inverzne funkcije.
- [5] Graf funkcije f .
- [5] Graf inverzne funkcije.

3. [10] Izračunaj enačbo tangente na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

v točki z absciso $x = 0$.

Rešitev: Odvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki z absciso $x = 0$ je tako

$$k = f'(0) = 2.$$

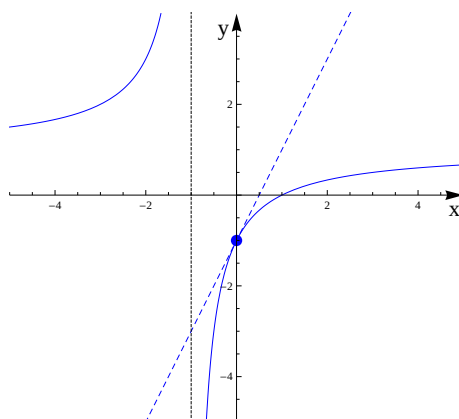
Če upoštevamo še, da je

$$y = f(0) = -1,$$

dobimo enačbo tangente

$$y = 2x - 1.$$

Poglejmo še graf.



□

- [4] Izračun odvoda.
- [2] Izračun k .
- [2] Izračun začetne vrednosti.
- [2] Enačba tangente.

4. [10] Izračunaj minimum in maksimum funkcije

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

na intervalu $[0, 2]$.

Rešitev: Odvod funkcije f je

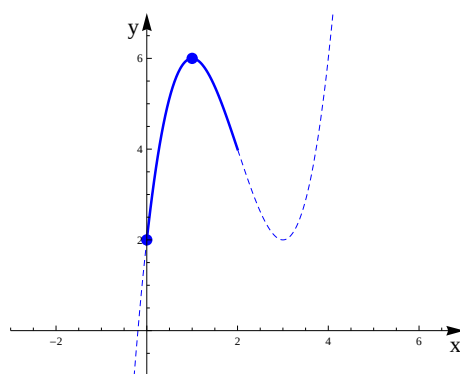
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Stacionarni točki sta torej $x = 1$ in $x = 3$. Znotraj intervala $[0, 2]$ leži samo stacionarna točka $x = 1$, zato so kandidati za ekstreme funkcije f točke $\{0, 1, 2\}$. Iz vrednosti $f(0) = 2$, $f(1) = 6$ in $f(2) = 4$ sklepamo, da je:

$$\max(f) = 6 \text{ pri } x = 1,$$

$$\min(f) = 2 \text{ pri } x = 0.$$

Poglejmo še graf funkcije f .



□

- [3] Izračun odvoda.
- [2] Izračun stacionarnih točk.
- [3] Izračun vrednosti funkcije v kandidatih za ekstreme.
- [2] Rezultat.

5. [10] Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 - 12x - 10y + 1$$

in jih klasificiraj.

Rešitev: Parcialna odvoda sta enaka $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 5y - 12$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4y - 10$. Od tod dobimo sistem enačb:

$$6x + 5y = 12,$$

$$5x + 4y = 10,$$

ki ima rešitev $x = 2$ in $y = 0$. Funkcija f ima torej eno stacionarno točko $T(2, 0)$. Izračunajmo še druge odvode: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Sledi

$$f_{xx}(2, 0)f_{yy}(2, 0) - f_{xy}(2, 0)^2 = 6 \cdot 4 - (5)^2 < 0,$$

kar pomeni, da ima f v točki $T(2, 0)$ sedlo. □

- [2] Po točka za vsak prvi parcialni odvod.
- [1] Sistem enačb.
- [2] Izračunana stacionarna točka.
- [2] Izračun drugih parcialnih odvodov.
- [1] Izračun izraza $f_{xx}(2, 0)f_{yy}(2, 0) - f_{xy}(2, 0)^2$.
- [2] Sklep, da ima funkcija f v stacionarni točki sedlo.

6. [15] Čimbolj natančno skiciraj graf funkcije $f(x) = xe^{-x}$.

Rešitev: Najprej bomo izračunali potrebne podatke, nato pa skicirali graf funkcije f .

- Funkcija f je definirana na $D_f = \mathbb{R}$ in ima ničlo v točki $x = 0$. Limiti na robovih definicijskega območja pa sta

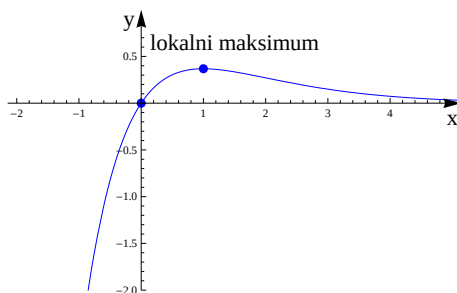
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty.\end{aligned}$$

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

V točki $x = 1$ ima funkcija f lokalni maksimum.

Poglejmo si sedaj še graf funkcije f .



□

- [2] Po točka za izračun D_f in ničle.
- [4] Po dve točki za izračun vsake limite.
- [4] Izračun odvoda in lokalnega maksimuma.
- [5] Skica grafa funkcije f .

7. [10] Poišči pravokotno projekcijo točke $T(4, 4, 4)$ na premico, ki gre skozi točki $A(1, 3, 4)$ in $B(5, 7, 4)$.

Rešitev: Premica p , ki gre skozi točki A in B , ima smerni vektor $\vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4, 4, 0)$, za začetno točko pa lahko izberemo $\vec{r}_0 = (1, 3, 4)$.

Pravokotna projekcija točke T na premico p je potem

$$\vec{r}_P = \vec{r}_0 + ((\vec{r}_T - \vec{r}_0) \cdot \vec{s}) \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2} = (1, 3, 4) + ((3, 1, 0) \cdot (4, 4, 0)) \frac{\vec{s}}{32} = (3, 5, 4).$$

□

- [4] Smer in začetna točka premice p .
- [4] Uporaba formule za pravokotno projekcijo.
- [2] Pravokotna projekcija.

8. [10] Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$ in $C(1, 3, 5)$.

Rešitev: Stranici trikotnika ABC sta $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ in $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$, zato je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Od tod dobimo

$$S = \frac{1}{2} |(1, -2, 1)| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

□

- [3] Izračun vektorjev stranic.
- [4] Izračun vektorskega produkta.
- [3] Rezultat.