

Prvi kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

30. november 2018

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Števila

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\textbf{Diskriminanta: } D = b^2 - 4ac$$

$$\textbf{Ničle: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\textbf{Teme: } T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

D_f in Z_f

$f(x)$	D_f	Z_f
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\log x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Kotne funkcije

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}\end{aligned}$$

Povezave

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x\end{aligned}$$

1. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = -x^4 - x^2 \quad \text{in} \quad g(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

- a) Nariši graf funkcije f .
- b) Nariši graf funkcije g .
- c) Nariši graf funkcije $\frac{f}{g}$.

Rešitev:

- a) f ima dvojno ničlo 0
- b) g ima enojno ničlo -1 in dvojno ničlo 1
- c) dvojna ničla 0, enojni pol -1 in dvojni pol 1, asimptota $y = -x - 1$, graf seka asimptoto pri $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = e^{x-1} - 1 \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

- a) Določi definicijski območji in zalogi vrednosti funkcij f in g .
- b) Poišči ničle funkcije f in nariši njen graf.
- c) Poišči ničle funkcije g in nariši njen graf.
- d) Določi predpis sestavljene funkcije $g \circ f$ in ga poenostavi.

Rešitev:

- a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = (-1, \infty)$, $Z_f = (-1, \infty)$, $Z_g = \mathbb{R}$
- b) Ničla je $x = 1$.
- c) Ničla je $x = 0$.
- d) $(g \circ f)(x) = \frac{x-1}{2}$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f in s predpisom

$$f(x) = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

- a) Poišči D_f in Z_f .
- b) Poišči ničle funkcije f .
- c) Nariši graf funkcije f .
- d) Za vsak $y \in Z_f$ poišči $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, ki reši enačbo $f(x) = y$.

Rešitev:

- a) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [0, 2]$
- b) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- c)
- d) $x = \frac{\pi}{4} + \arcsin(1 - y)$

4. naloga (25 točk)

Za neka $a, b \in \mathbb{R}$ je dana funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2018x)}{x} & : x < 0 \\ a & : x = 0 \\ \frac{b-x}{1+x} & : x > 0 \end{cases}$$

- a) Za katere vrednosti a, b obstaja limita $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
- b) Za katere vrednosti a, b je f zvezna na $\mathbb{R}$?
- c) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Rešitev:

- a) $a \in \mathbb{R}, b = 2018$
- b) $a = b = 2018$
- c) -1