

Prvi kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

27. november 2019

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Števila

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Diskriminanta: $D = b^2 - 4ac$

Ničle: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Teme: $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

D_f in Z_f

$f(x)$	D_f	Z_f
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\log x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Kotne funkcije

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}\end{aligned}$$

Povezave

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x, & \cos(2\pi - x) &= \cos x\end{aligned}$$

Odvodi

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R}) \\ (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= a^x \ln a \quad (a > 0) \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0) \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

1. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad \text{in} \quad g(x) = x^2 + x - 2.$$

- a) Nariši graf funkcije f .
- b) Nariši graf funkcije g .
- c) Nariši graf funkcije $\frac{f}{g}$.

Rešitev:

- a) f ima enojno ničlo 2 in dvojno ničlo -1
- b) g ima enojni ničli 1 in -2
- c) enojna ničla 2, dvojna ničla -1 , enojna pola 1 in -2 , asimptota $y = x - 1$, graf ne seka asimptote

2. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = 2e^{2-x} + 2 \quad \text{in} \quad g(x) = \ln\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 1.$$

- a) Določi definicijski območji ter zalogi vrednosti funkcij f in g .
- b) Skiciraj grafa funkcij f in g .
- c) Določi predpis sestavljene funkcije $g \circ f$ in ga poenostavi.

Rešitev:

a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = (2, \infty)$, $Z_f = (2, \infty)$, $Z_g = \mathbb{R}$

b)

c) $(g \circ f)(x) = 3 - x$

3. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = 1 - \cos x \quad \text{in} \quad g(x) = \sin^2 x.$$

- a) Določi definicijski območji ter zalogi vrednosti funkcij f in g .
- b) Poišči presečišča grafov funkcij f in g .
- c) Skiciraj grafa funkcij f in g .

Rešitev:

- a) $D_f = D_g = \mathbb{R}$, $Z_f = [0, 2]$, $Z_g = [0, 1]$
- b) $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

4. naloga (25 točk)

Za nek $a \in \mathbb{R}$ je dana funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} & : x \neq 0 \\ a & : x = 0 \end{cases}$$

- a) Za katero vrednost a je f zvezna na $\mathbb{R}$?
- b) Določi enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Rešitev:

a) $a = 2$

b) $y = \frac{24}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^3}x$