

Rešitve 2. kolokvija iz Matematike 2

1. [10] Ploskev je podana parametrično s predpisom

$$\vec{r}(u, v) = (1 + e^{2u}, e^{-v}, u + v + uv).$$

Določi ploskovno normalo in tangentno ravnino na ploskev v točki $\vec{r}(0, 0)$.

Rešitev: Najprej izračunajmo smerna odvoda:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= (2e^{2u}, 0, 1 + v), \\ \vec{r}_v &= (0, -e^{-v}, 1 + u).\end{aligned}$$

V točki $\vec{r}(0, 0) = (2, 1, 0)$ je $\vec{r}_u = (2, 0, 1)$ in $\vec{r}_v = (0, -1, 1)$. Od tod dobimo ploskovno normalo

$$\vec{n} = (2, 0, 1) \times (0, -1, 1) = (1, -2, -2).$$

Tangentna ravnina ima tako enačbo:

$$\begin{aligned}(x - 2, y - 1, z) \cdot (1, -2, -2) &= 0, \\ x - 2 - 2(y - 1) - 2z &= 0, \\ x - 2y - 2z &= 0.\end{aligned}$$

□

- [2] Izračun smernih odvodov.
- [4] Smer normale in točka na ravnini.
- [4] Enačba tangentne ravnine.

2. [10] Izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ na $[2, 3]$.

Rešitev: Imenovalec lahko razcepimo v obliki $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Razcep na parcialna ulomka je zato

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x(A+B) + 2B - A}{(x+2)(x-1)}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ -A + 2B &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = B = 1$. Tako dobimo

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln(x+2) + \ln(x-1) + C.$$

Ploščina lika je potem enaka

$$S = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx = (\ln(x+2) + \ln(x-1)) \Big|_2^3 = \ln 5 + \ln 2 - (\ln 4 + \ln 1) = \ln \frac{5}{2}.$$

□

- [5] Razcep na parcialna ulomka.
- [3] Integracija.
- [2] Ploščina lika.

3. [10] Izračunaj integral funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1$ po kvadratu, omejenem s premicami $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ in $y = 2$.

Rešitev: Kvadrat lahko parametriziramo z $x \in [0, 1]$ in $y \in [1, 2]$. Sledi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_1^2 (x^2 + y^2 + 2xy + 1) dy &= \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + xy^2 + y \right) \bigg|_{y=1}^{y=2}, \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 + 3x + \frac{10}{3} \right), \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{10}{3}x \right) \bigg|_{x=0}^{x=1}, \\ &= \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

□

- [2] Izračun mej.
- [3] Integracija po spremenljivki y .
- [3] Integracija po spremenljivki x .
- [2] Rezultat.

4. [15] Izračunaj središče krožnega izseka $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Rešitev: Iščemo središče četrtnine kroga, ki leži v prvem kvadrantu. Parametriziramo ga lahko v polarnih koordinatah s predpisoma $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ in $r \in [0, 3]$. Njegova ploščina je enaka četrtnini ploščine kroga s polmerom $R = 3$, kar je $S = \frac{1}{4}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{4}\pi$. Poleg tega je:

$$\begin{aligned} \iint_L x \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^3 r \cos \phi \, r \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \left(\cos \phi \frac{r^3}{3} \right) \bigg|_{r=0}^{r=3}, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos \phi \, d\phi = 9 \sin \phi \bigg|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}}, \\ &= 9. \end{aligned}$$

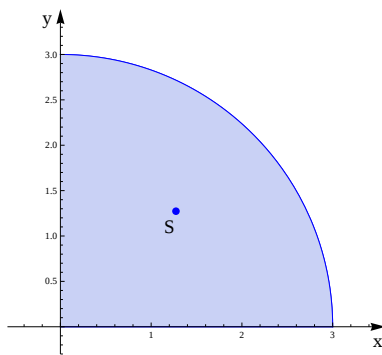
Analogno lahko izračunamo, da je tudi

$$\iint_L y \, dx \, dy = 9.$$

Od tod dobimo koordinati središča krožnega izseka:

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{\iint_L x \, dx \, dy}{S} = \frac{9}{\frac{9}{4}\pi} = \frac{4}{\pi}, \\ y_* &= \frac{\iint_L y \, dx \, dy}{S} = \frac{9}{\frac{9}{4}\pi} = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Poglejmo še skico.



□

- [3] Ploščina krožnega izseka.
- [3] Parametrizacija krožnega izseka.
- [3] Izračun: $\iint_L x \, dx \, dy$.
- [3] Izračun: $\iint_L y \, dx \, dy$.
- [3] Koordinati središča.

5. [10] Poišči rešitev enačbe

$$y' + 2xy = e^{-x^2}$$

pri začetnem pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev: Homogeni del:

Imamo enačbo:

$$\begin{aligned}y' + 2xy &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -2x \, dx, \\ \ln y &= -x^2 + c, \\ y &= e^{-x^2+c}, \\ y &= Ce^{-x^2}.\end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzemimo nastavek

$$y(x) = C(x)e^{-x^2}.$$

Potem je $y'(x) = C'(x)e^{-x^2} + C(x)(-2x)e^{-x^2}$. Ko to vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned}C'(x)e^{-x^2} + C(x)(-2x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} &= e^{-x^2}, \\ C'(x)e^{-x^2} &= e^{-x^2}, \\ C'(x) &= 1, \\ C(x) &= \int 1 \, dx = x + C.\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = C(x)e^{-x^2} = (x + C)e^{-x^2}.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo $y(0) = C = 1$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = (x + 1)e^{-x^2}.$$

□

- [4] Rešitev homogene enačbe.
- [4] Rešitev nehomogene enačbe.
- [2] Rešitev enačbe.

6. [15] Na izpit iz matematike je prišlo 50 študentov. Med njimi jih je 10 učenju posvetilo precej časa, 20 nekaj časa, 20 pa se jih sploh ni učilo. Študent, ki se je precej učil, opravi izpit z 90-odstotno verjetnostjo, študent, ki se je malo učil, s 50-odstotno verjetnostjo, študent, ki se ni učil, pa z 10-odstotno verjetnostjo.

(a) [10] Kakšna je verjetnost, da naključno izbrani študent opravi izpit?

(b) [5] Kakšna je verjetnost, da se študent, ki je opravil izpit, ni učil?

Rešitev: (a) Iskano verjetnost bomo izračunali s pomočjo obrazca za popolno verjetnost. Za hipoteze bomo vzeli:

H_1 ... študent se je precej učil,

H_2 ... študent se je učil nekaj časa,

H_3 ... študent se ni učil.

Verjetnosti hipotez so $P(H_1) = \frac{1}{5}$, $P(H_2) = \frac{2}{5}$ in $P(H_3) = \frac{2}{5}$. Označimo še

A ... Iz druge posode izvlečemo belo kroglico.

Potem je po predpostavki $P(A|H_1) = \frac{9}{10}$, $P(A|H_2) = \frac{5}{10}$ in $P(A|H_3) = \frac{1}{10}$. Sledi

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{21}{50}.$$

(b) Verjetnost, da se študent, ki je opravil izpit ni učil, pa je po Bayesovi formuli enaka

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{50}}{\frac{21}{50}} = \frac{2}{21}.$$

□

· [3] Izračun $P(H_1)$, $P(H_2)$ in $P(H_3)$.

· [3] Izračun $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$ in $P(A|H_3)$.

· [4] Rezultat.

· [2] Uporaba Bayesove formule.

· [3] Rezultat.

7. [10] V posodi so štiri kroglice s števkami 1, 2, 3 in 4. Iz posode naključno izvlečemo dve kroglici in označimo z X vsoto števil na teh dveh kroglicah. Izračunaj porazdelitev in povprečno vrednost slučajne spremenljivke X .

Rešitev: Če izvlečemo dve kroglici, so možni pari (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) in (3, 4). Možne vrednosti slučajne spremenljivke X so torej 3, 4, 5, 6 in 7.

Porazdelitev vsote X je enaka

$$X : \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Povprečna vrednost X pa je

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} = 5.$$

□

- [3] Zapis možnih parov.
- [3] Porazdelitev X .
- [4] Povprečna vrednost X .

8. [10] Hokejist v povprečju zadene enega izmed treh prostih strellov. Med sezono izvede 100 prostih strellov. Z Laplaceovo aproksimacijo oceni verjetnost, da bo zadel med 30 in 40 strellov.

Rešitev: Označimo z X število zadetkov. Potem je X porazdeljena binomsko s parametroma $n = 100$ in $p = 1/3$. Sledi:

$$\begin{aligned} P(30 \leq X \leq 40) &\approx \Phi\left(\frac{40 - \frac{100}{3}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{30 - \frac{100}{3}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right), \\ &= \Phi(1.41) - \Phi(-0.71) = 0.42 + 0.26, \\ &= 0.68. \end{aligned}$$

□

- [4] Zapis parametrov n , p , a in b .
- [4] Laplaceova aproksimacija.
- [2] Rezultat.