

## Drugi kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

19. januar 2018

Ime in priimek

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

|          |  |
|----------|--|
| 1        |  |
| 2        |  |
| 3        |  |
| 4        |  |
| $\Sigma$ |  |

## NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

## Tabela osnovnih odvodov

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{za } a > 0$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

## Adicijski izreki

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

## Faktorizacija

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

## Polovični koti

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

## Defaktorizacija

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

## Vrednosti kotnih funkcij

| $\theta \rightarrow$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin \theta$        | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \theta$        | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \theta$        | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | /               |

**1. naloga (25 točk)**

Dana je funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

a) Izračunaj  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

b) S pomočjo odvoda pokaži, da je  $f$  padajoča na  $[0, \infty)$ .

c) S pomočjo podnalog a) in b) poišči zalogo vrednosti  $Z_f$ .

d) Poišči predpis za inverzno funkcijo  $f^{-1} : Z_f \rightarrow [0, \infty)$ .

**Rešitev:**

a) 0

b)  $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$  za  $x \geq 0$

c)  $Z_f = (0, 1]$

d)  $f^{-1}(y) = \sqrt{-2 \ln y}$

**2. naloga (25 točk)**

Dani sta funkciji  $f(x) = \sin x^2$  in  $g(x) = \cos x^2$ .

- a) Izračunaj presečišča grafov funkcij  $f$  in  $g$  nad intervalom  $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ .
- b) Za vsako od presečišč iz naloge a) določi kot, pod katerim se grafa sekata.

**Rešitev:**

a)  $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

b)  $\arctan \frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi-2}$

### 3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{\tan x}.$$

a) Izračunaj  $\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ .

b) Za katero vrednost  $a \in \mathbb{R}$  je funkcija  $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \\ a & : x = 0 \end{cases}$$

zvezna?

**Rešitev:**

a) 0

b)  $a = 1$

#### 4. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = xe^{-2x^2}.$$

- a) Določi enačbo tangente in normale na graf funkcije  $f$  v točki  $x = 0$ .
- b) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije  $f$ .

**Rešitev:**

a)  $y = x$

- b) Stacionarni točki sta  $x = -\frac{1}{2}$  in  $x = \frac{1}{2}$ . Prva je lokalni minimum, druga pa lokalni maksimum.