

Drugi kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

24. januar 2020

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Števila

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\textbf{Diskriminanta: } D = b^2 - 4ac$$

$$\textbf{Ničle: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\textbf{Teme: } T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

$$D_f \text{ in } Z_f$$

$f(x)$	D_f	Z_f
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\log x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Kotne funkcije

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

(De)faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Odvodi

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R}) \\ (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= a^x \ln a \quad (a > 0) \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0) \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Linearen približek:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Integrali

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\textbf{Prostornina vrtenine: } V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$\textbf{Plašč vrtenine: } P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Diferencialne enačbe

$$\textbf{Ločljivi spremenljivki: } y' = f(x)g(y)$$

$$\bullet \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$\textbf{Linearna 1. reda: } y' + p(x)y = q(x)$$

$$\textbf{HD: } y' + p(x)y = 0, y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

$$\textbf{VK: } y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$$

1. naloga (25 točk)

Poišči območja naraščanja in padanja, stacionarne točke, lokalne ekstreme, prevoje, območja konveksnosti in konkavnosti ter nariši grafe funkcij f s predpisom

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

Rešitev: $D_f = (0, \infty)$, raste: $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$, pada: $(0, e^{-\frac{1}{2}})$, Lok. min.: $x = e^{-\frac{1}{2}}$, konveksna: $(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$, konkavna: $(0, e^{-\frac{3}{2}})$, prevoj: $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo D omejeno območje, ki leži med grafoma funkcij $f(x) = x^2$ in $g(x) = 1$.

a) Izračunaj ploščino območja D .

b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če območje D zarotiramo okoli x osi.

Rešitev:

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{8\pi}{5}$

3. naloga (25 točk)

Dana je diferencialna enačba

$$y' = \frac{x}{x^2 - 1} y^2. \quad (1)$$

a) Preveri, da funkcija $y = 0$ reši enačbo (1).

b) Poišči tisto rešitev enačbe (1), ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev:

a) Če je $y = 0$, je $y' = 0$ in $\frac{x}{x^2 - 1} y^2 = 0$.

b) $y = \frac{2}{2 - \ln(1 - x^2)}$

4. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

ki zadošča pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: $y = x^2 - x$