

Tretji kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

19. april 2019

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\textbf{Diskriminanta: } D = b^2 - 4ac$$

$$\textbf{Ničle: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Tabela integralov

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \text{za } a > 0 \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Diferencialne enačbe

$$\textbf{Ločljivi spremenljivki: } y' = f(x)g(y)$$

$$\bullet \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$\textbf{Linearna 1. reda: } y' + p(x)y = q(x)$$

$$\textbf{HD: } y' + p(x)y = 0, y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

$$\textbf{VK: } y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$$

$$\textbf{Bernoulli: } y' + p(x)y = q(x)y^r; r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\bullet z = y^{1-r} \implies z' = (1-r)y^{-r}y'$$

$$\textbf{Lin. 2R, konst. koef.: } ay'' + by' + cy = f(x)$$

$$\bullet a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0: y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$D = 0: y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$$

$$D < 0: \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i; y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\begin{aligned}\bullet y &= u_1 y_1 + u_2 y_2, \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{f}{a} & y_2' \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{f}{a} \end{vmatrix}, \\ u_1' &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, u_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}\end{aligned}$$

$$\bullet f(x) = p(x)e^{\mu x}: y_P = x^s q(x)e^{\mu x}$$

$$\bullet f(x) = p(x) \cos(\mu x) \text{ ali } p(x) \sin(\mu x): y_P = x^s q(x) (A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x))$$

1. naloga (25 točk)

Dana je diferencialna enačba

$$y' = xy. \quad (1)$$

a) Preveri, da funkcija $y = 0$ reši enačbo (1).

b) Poišči tisto rešitev enačbe (1), ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev:

a) Če je $y = 0$, je $y' = 0$ in $xy = 0$.

b) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$

2. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' - \frac{y}{x} = x \sin x,$$

ki zadošča pogoju $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Rešitev: $y = -x \cos x$

3. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' - 3y = x + 1,$$

ki zadošča pogoja $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: $\frac{e^{3x}}{9} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$

4. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 4y = 1,$$

ki zadošča pogoju $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: $\frac{1 - \cos(2x)}{4}$