

Četrty kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

4. junij 2018

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Tabela integralov

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \text{za } a > 0 \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Prostornina vrtenine

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Površina plašča vrtenine

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Dolžina loka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Masa in težišče

$$\begin{aligned}m &= \iint_D \rho(x, y) dx dy \\ x_T &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ y_T &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy\end{aligned}$$

Polarne koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad J(r, \varphi) = r \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

1. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 4y' + 3y = e^x,$$

ki zadošča pogojem $y(0) = -1$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: $y = \frac{3}{4}e^{3x} - \frac{2x+7}{4}e^x$

2. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija f dana s predpisom

$$f(x, y) = \frac{xy}{y+1}.$$

- a) Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije f v točki $(-2, 1, f(-2, 1))$.
- b) Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) $z = \frac{x-y+1}{2}$

- b) Edina stacionarna točka je $(0, 0)$, ki ni lokalni ekstrem.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj maso in težišče plošče z gostoto $\rho(x, y) = y$ v obliki paralelograma z oglišči $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ in $(1, 1)$.

Rešitev: $m = 1$, $T\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

4. naloga (25 točk)

Izračunaj

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy,$$

kjer je D območje v ravnini, ki leži desno od y osi med premicama $y = x$ in $y = -x$ ter krožnicama $x^2 + y^2 = 1$ in $x^2 + y^2 = 4$.

Rešitev: $\frac{\pi(e^4 - e)}{4}$