

Četrty kolokvij iz Matematike 2 (GIK, NTO)

5. junij 2019

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Števila

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Tabela integralov

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \quad r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad \text{za } a > 0 \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x, & \cos(2\pi - x) &= \cos x\end{aligned}$$

Tangentna ravnina, linearni približek

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Stacionarne točke in lokalni ekstremi

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Masa in težišče

$$\begin{aligned}m &= \iint_D \rho(x, y) dx dy \\ x_T &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ y_T &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy\end{aligned}$$

Polarne koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & J(r, \varphi) &= r \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Cilindrične koordinate

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z \\ J(r, \varphi, z) &= r, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

1. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija f dana s predpisom

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{y-1}.$$

- a) Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije f v točki $(2, 2, f(2, 2))$.
- b) Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

- a) $z = -1 + 2x + y$
- b) Edina stacionarna točka je $(1, 0)$, ki ni lokalni ekstrem.

2. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$ na krogu $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

Rešitev: Največja vrednost je $f(2, 0) = 2$, najmanjša pa $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj maso in težišče plošče z gostoto $\rho(x, y) = x$ v obliki paralelograma z oglišči $(0, -1)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$ in $(1, 0)$.

Rešitev: $m = 3, T\left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

4. naloga (25 točk)

Izračunaj

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy,$$

kjer je D območje v ravnini, ki leži v prvem kvadrantu in ga omejujejo premici $y = x$ in $x = 0$ ter krožnici $x^2 + y^2 = 1$ in $x^2 + y^2 = 9$.

Rešitev: $2 - \sqrt{2}$