

1. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 1

Finančna matematika

22. januar 2014

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Pokaži, da je iterativna metoda $x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n \left(6 + \frac{3a}{x_n^2} - \frac{x_n^2}{a}\right)$ za računanje $\sqrt{a}$ reda 3. Izračunaj prvi približek za $\sqrt{3}$, kjer je $x_0 = 1.5$.

2. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem poišči rešitev sistema:

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6.\end{aligned}$$

Z njegovo pomočjo izračunaj še determinanto matrike.

3. (a) Poišči učinkovit algoritem za izračun inverza matrike oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & \\ b_1 & a_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Preštej število potrebnih operacij in zapiši algoritem. Kakšen je pogoj, da inverz sploh obstaja.

- (b) Nato poišči še učinkovit algoritem za reševanje sistema

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

kjer ima matrika A zgornjo obliko.

4. S pomočjo Givensovih rotacij reši predoločen sistem:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 22 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Veliko uspeha pri reševanju!

2. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 1

Finančna matematika

6. februar 2014

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Pretvori izraz

$$\frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}$$

v stabilnejšo obliko. Opiši pri kakšnih x naletiš na težave. Izračunaj vrednost izraza v nestabilni in stabilni obliki za $x = 10^{-16}$.

2. S pomočjo LU razcepa reši sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -7 & -7 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ -4 & -1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Z uporabo Householderjevih zrcaljenj z leve in desne transformiraj matriko

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

v tridiagonalno obliko. Podobnostne matrike ni potrebno izračunati. Zapiši še skico algoritma, ki to naredi za splošno simetrično matriko dimenzije $n \times n$ in približno preštej število operacij. Koliko dodatnih operacij bi potreboval še za izračun ortogonalne podobnostne transformacije. Namig: najprej poišči Householderjevo zrcaljenje P_1 , ki preslika prvi stolpec v vektor, ki ima zadnji dve komponenti enaki 0. Kaj se zgodi, ko uporabiš P_1 še z desne?

4. Poišči premico, ki se najboljše prilega točkam $(1, 13)$, $(2, 10)$, $(3, 11)$, $(4, 8)$, po metodi najmanjših kvadratov. Za reševanje predoločenega sistema uporabi modificiran Gram-Schmidtov postopek.

3. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 1

Finančna matematika

2. 9. 2014

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Četrty koren $\sqrt[4]{a}$ lahko izračunamo z naslednjo iterativno funkcijo

$$g(x) = -\frac{4x^5}{a - 5x^4}.$$

- (a) Pokaži, da je $\sqrt[4]{a}$ res fiksna točka g in izračunaj red konvergence.
(b) Naredi dva koraka za $a = 9$ in začetni približek $x_0 = 1.70$. Vmesne rezultate zapiši na 7 decimalk natančno. Kako narašča število točnih decimalk?
2. Naredi LU razcep z delnim pivotiranjem matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči permutacijsko matriko P in matriki L in U , da velja $PA = LU$. S pomočjo razcepa reši linearni sistem $Ax = b$, za vektor $b = [8 \ -1 \ 8]^T$. Velja $LUx = Pb$.

3. Rešili smo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa brez pivotiranja. Matrika A je dimenzije $n \times n$. Napiši ekonomičen algoritem za rešitev razširjenega sistema. To je sistem, kjer matriki A dodamo stolpec in vrstico ter vektorju b en element na konec. Preštej število operacij, zadosti je izračunati red in vodilni koeficient.
Nasvet. Razširjeno matriko in razširjen vektor ustrezno bločno razdeli. Nato napiši algoritem, ki izkoristi poznavanje količin iz reševanja $L(Ux) = b$.

4. S pomočjo QR razcepa matrike

$$A = \begin{bmatrix} \frac{6}{13} & \frac{46}{65} & -\frac{73}{65} \\ -\frac{13}{24} & \frac{65}{47} & -\frac{11}{65} \\ \frac{24}{13} & \frac{29}{13} & \frac{17}{13} \end{bmatrix}$$

z Givensovimi rotacijami, reši sistem $Ax = b$, kjer je $b = \begin{bmatrix} -\frac{89}{65} & -\frac{98}{65} & \frac{12}{13} \end{bmatrix}^T$. Matrike Q ni potrebno eksplicitno izračunati.

3. PISNI IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD 1

Finančna matematika

31. avgust 2015

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Pretvori izraz

$$\frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}$$

v stabilnejšo obliko. Opiši pri kakšnih x naletiš na težave. Izračunaj vrednost izraza v plavajoči vejici v nestabilni in stabilni obliki za $x = 10^{-16}$.

2. Izračunajte LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

z delnim pivotiranjem. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je $b = [4 \ 7 \ -5]^T$.

3. Sestavi učinkovit algoritem za izračun LDL^T razcepa, kjer je L spodnje trikotna z enicami na diagonalni, D pa diagonalna matrika, za simetrično tridiagonalno matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Preštej tudi število operacij. Če ne gre v splošnem, si pomagaj na primeru

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Poišči premico, ki se najboljše prilega točkam $(1, 13)$, $(2, 10)$, $(3, 11)$, $(4, 8)$, po metodi najmanjših kvadratov. Za reševanje predločenega sistema uporabi modificiran Gram-Schmidtov postopek.

Veliko uspeha pri reševanju!

Prvi izpit - NM1(F)

2.2.2016

1. V enačbi $x^2 + \ln x + a = 0$ je $a \in \mathbb{R}$ določen tako, da je $\alpha = 1/2$ rešitev enačbe. Zapišemo jo v ekvivalentni obliki $x = g(x)$, kjer je

a) $g(x) = \sqrt{-\ln x - a}$,

b) $g(x) = \frac{1}{3} \left(x + e^{-(a+x)^2} \right)$.

Obravnavaj konvergenco obeh iterativnih metod. V primeru, da je katera izmed njiju konvergentna, izračunaj red konvergence.

2. Sistem

$$x^2 + y^2 = 2,$$

$$x^2 - 2xy + y = 2,$$

rešujemo z metodo gradientnega spusta za približek $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

- a) Poišči smer spusta $v = -\text{grad}G(1, 1)$, kjer je G pozitivna funkcija, ki jo priredimo zgornjemu sistemu enačb.
- b) Določi $\lambda \in \mathbb{R}$ tako, da bo vrednost $G((x_0, y_0) + \lambda v)$ minimalna.
- c) Kaj bi pomenilo, če bi v točki $b)$ dobili tudi nek $\lambda < 0$?

3. Podane so točke $(1, 6, 0)$, $(2, 1, -1)$ in $(2, 2, 1)$.
- a) Poišči predoločen sistem za funkcijo oblike $z = ax + by$, ki se jim najboljše prilega po metodi najmanjših kvadratov.
 - b) Poišči QR -razcep matrike iz točke a) tako, da elemente v prvem stolpcu uničiš z zrcaljenjem, v drugem pa z rotacijo.
 - c)* Določi rešitev $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ za sistem iz točke a).

4. a) Preštej število realnih operacij, ki jih potrebujemo za seštevanje, množenje oz. deljenje dveh kompleksnih števil.
- b) Naj bo $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zgornje trikotna in $b \in \mathbb{C}^n$. Preštej število realnih operacij, ki jih potrebujemo za obratno substitucijo pri reševanju sistema $Ux = b$ v kompleksni aritmetiki.
- c) Ali bi prihranili na časovni zahtevnosti, če problem razbijemo na realne bloke $U = U_1 + iU_2$, $b = b_1 + ib_2$, $x = x_1 + ix_2$, ter ga rešimo z običajnim LU -razcepom?

Prvi izpit - NM1(F)
25.2.2016

1. Z Gramm-Schmidtovim postopkom izračunajte QR -razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Za $0 < a < 2$ je podana matrika.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 5 \end{bmatrix}.$$

- a) Izračunaj 1-normo matrike A in njenega inverza, ter z njima dokaži, da za poljubno vrednost parametra velja

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 < 14.$$

- b) V odvisnosti od a izračunaj LU -razcep z delnim pivotiranjem. Pri kateri vrednosti parametra je pivotna rast največja?

3. Podana je polinomska enačba

$$p(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$$

- a) Denimo, da želimo s tangentno metodo poiskati ničlo $x = 1$. Kakšen je red konvergence?
- b) Metodo izboljšamo z dvema parametroma

$$x_{n+1} = ax_n + b \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

Določi $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo red konvergence maksimalen.

4. Naj bosta $V, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornje trikotni.

- a) Sestavi učinkovit algoritem za rešitev matrične enačbe $VX = W$.
- b) Naj bosta matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d. Sestavi učinkovit algoritem za iskanje rešitve matrične enačbe $X^TAX = B$. Ali je tako dobljena rešitev enolična?

V obeh primerih preštej število operacij.

Prvi izpit - NM1(F)
30.1.2017

1. (25) Rešujemo enačbo

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Prišli smo do dobrega približka za ničlo $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2 \cong 0.38$.
Nadaljujemo iterativno. Katera izmed metod je najboljša:

a) $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1)$.

b) $x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$.

c) tangentna metoda.

Svoj odgovor dobro utemelji!

2. (25) Podan je sistem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

$$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0,$$

$$3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0.$$

Napravi en korak Newtonove metode za približek $(1, 0, 2)$.

3. (20) S singularnim razcepom poiši psevdoinverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. (30) Podani sta matriki

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = B^T B = \begin{bmatrix} 25 & -50 \\ -50 & 101 \end{bmatrix}.$$

a) Napravi QR razcep za B in razcep Choleskega za A . Kaj opaziš?

b) Naj bo rang $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, poln. Pokaži, da je matrika $A = B^T B$ simetrična in pozitivno definitna ter da tudi zanjo velja ugotovitev iz a).

c) Naj bosta A in B kot v točki b). Ali za QR razcep matrike B porabimo manj operacij kot za razcep Choleskega matrike A ? Prednost prvega pristopa je, da ni potrebno izračunati produkta $B^T B$. Kdaj to znantno pripomore k stabilnosti?

Drugi izpit - NM1(F)
13.6.2017

1. Koren $\sqrt[3]{\alpha} > 0$ želimo poiskati z iteracijo oblike

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n^2}.$$

Določi $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo hitrost konvergence optimalna. Za katere približke x_0 konvergenco zagotovi skrčitveno načelo? Dokaži, da je metoda v resnici konvergentna za vsak $x_0 > 0$.

2. Določi vse parametre $\alpha \in \mathbb{R}$, za katere je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -4 \\ 6 & 18 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ -4 & 3 & -4 & \alpha \end{bmatrix}$$

simetrična in pozitivno definitna.

3. Nelinearni sistem enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ x^2 - 2xy + y &= 2, \end{aligned}$$

rešujemo z metodo gradientnega spusta, pri kateri na vsakem koraku izberemo najboljši možni skalar $\lambda > 0$.

- a) Napravi en korak metode za začetni približek $(1, 1)$.
 - b) Pokaži, da bo smer spusta v naslednjem koraku pravokotna na smer spusta v prvem koraku.
 - c) Pokaži, da trditev iz točke b) drži za poljuben sistem.
4. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $b \in \mathbb{R}^n$.

- a) Dokaži, da je $x \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira izraz

$$\|Ax - b\|_2^2 + \alpha \|x\|_2^2, \quad \alpha > 0,$$

enak rešitvi predoločenega sistema podanega za razširjeno matriko $\tilde{A} = [A^T \ \alpha I]^T \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ in desno stranjo $\tilde{b} = [b^T \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

- b) Poišči rešitev problema iz točke a) za $\alpha = 1$ in

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$