

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

7. junij 2019

1. Naj bo $\{\lambda_A, \lambda_B, \lambda\} \subset (0, \infty)$. Dva bolnika, A in B, z okvaro ledvic, čakata na presaditev. V kolikor ledvice ne dobi, bo bolnik A umrl po $\text{Exp}(\lambda_A)$ časa, bolnik B pa po $\text{Exp}(\lambda_B)$ časa; bolnika umirata neodvisno en od drugega. Neodvisno od tega prihajajo ledvice darovalcev skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenziteto λ . Odločeno je bilo, da prvo ledvico dobi bolnik A in naslednjo bolnik B, v kolikor je bolnik A ob prihodu prve ledvice še živ; sicer dobi bolnik B takoj prvo ledvico (če seveda še ni umrl).

(a) (12 točk) Določi verjetnost, da dobi bolnik A ledvico darovalca preden umre.

(b) (13 točk) Določi verjetnost, da dobi bolnik B ledvico darovalca preden umre.

Rešitev. Naj bosta L_A in L_B časa, ko bi/bosta bolnika A in B umrla v kolikor ne dobita ledvice, in naj bodo $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ prihodni časi ledvic darovalcev. Naj bodo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ medprihodni časi prihodov ledvic darovalcev. Iz navodila sledi, da so L_A, L_B in $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ med seboj neodvisni, ter da je $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.- $\text{Exp}(\lambda)$ -p. slučajnih spremenljivk, neodvisno od (L_A, L_B) . Za prvi del nas zanima $P(L_A > S_1) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_A}$. Za drugi del nas zanima $P(L_A > S_1, L_B > S_2) + P(L_A \leq S_1 < L_B) = E[e^{-\lambda_A S_1 - \lambda_B S_2}] + E[e^{-\lambda L_A} - e^{-\lambda L_B}; L_A < L_B] = E[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)T_1 - \lambda_B T_2}] + E[e^{-(\lambda + \lambda_B)L_A}] - E[e^{-\lambda L_B}(1 - e^{-\lambda_A L_B})] = E[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)T_1}]E[e^{-\lambda_B T_2}] + E[e^{-(\lambda + \lambda_B)L_A}] + E[e^{-(\lambda + \lambda_A)L_B}] - E[e^{-\lambda L_B}] = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_A + \lambda_B} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_B} + \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\lambda + \lambda_A + \lambda_B} - \frac{\lambda_B}{\lambda + \lambda_B} = \frac{\lambda(\lambda + \lambda_A)}{(\lambda + \lambda_A + \lambda_B)(\lambda + \lambda_B)}$. Slednje lahko vidimo tudi z manj računanja in nekaj (precej) več razmisleka: bolnik B mora najprej živeti dlje kot $L_A \wedge S_1$, verjetnost za to je $P(L_B > L_A \wedge S_1) = \frac{\lambda + \lambda_A}{\lambda + \lambda_A + \lambda_B}$; pogojno na tem dogodku mora nato še živeti dlje, kot prihodni čas prve ledvice po času $L_A \wedge S_1$, ta pogojna verjetnost je enaka $\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_B}$ (zaradi lastnosti pozabljivosti eksponentne porazdelitve, krepke lastnosti Markova za HPPje, in vseh privzetih neodvisnosti, ...).

2. Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$ (glede na filtracijo $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$).

(a) (13 točk) Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Borelovo merljiva in lokalno integrabilna. Kot znano privzemi, da je za $t \in [0, \infty)$, $E[\sum_{i=1}^{N_t} f(S_i)] = \lambda \int_0^t f(s) ds$. Dokaži, da je proces $A = (A_t)_{t \in [0, \infty)} := (-\lambda \int_0^t f(s) ds + \sum_{i=1}^{N_t} f(S_i))_{t \in [0, \infty)}$ martingal (v filtraciji $\mathcal{F}$). **Nasvet:** Pokaži najprej, da ima A neodvisne prirastke (glede na $\mathcal{F}$).

(b) (12 točk) Naj bo $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Borelovo merljiva in lokalno integrabilna. Kot znano privzemi, da je za $t \in [0, \infty)$, $E[\prod_{i=1}^{N_t} g(S_i)] = e^{\lambda \int_0^t (g(s)-1) ds}$. Dokaži, da je proces $M = (M_t)_{t \in [0, \infty)} := (e^{-\lambda \int_0^t (g(s)-1) ds} \prod_{i=1}^{N_t} g(S_i))_{t \in [0, \infty)}$ martingal (v filtraciji $\mathcal{F}$).

(Kot običajno je $\sum_{i=1}^0(\dots) = 0$ in $\prod_{i=1}^0(\dots) = 1$.)

Rešitev. Proces M sta prilagojena (filtraciji $\mathcal{F}$) in po predpostavkah integrabilna ob vsakem fiksnem determinističnem času (v navodilu navedena upanja uporabimo za $|f|$ in $|g|$; proces M ima celo konstantno upanje $= 1$, proces A pa konstanto upanje $= 0$). Martingalska lastnost sledi iz navadne lastnosti Markova. Za $\{t, s\} \subset [0, \infty)$ lahko namreč zapišemo

$$M_{t+s} = M_t e^{-\lambda \int_t^{t+s} (g(u)-1) du} \prod_{i=1}^{\hat{N}_s} g(t + \hat{S}_i) = M_t \hat{M}_s$$

in

$$A_{t+s} = A_t - \lambda \int_t^{t+s} f(v) dv + \sum_{i=1}^{\hat{N}_s} f(t + \hat{S}_i) = A_t + \hat{A}_s,$$

kjer je $\hat{N} = (N_{t+u} - N_t)_{u \in [0, \infty)}$ proces prirastkov procesa N po času t (neodvisen od $\mathcal{F}_t$ in enako porazdeljen kot N) $\hat{S}_i$, $i \in \mathbb{N}$, so njegovi prihodni časi, končno so analogno definirane količine $\hat{M}$, $\hat{A}$, vendar za funkciji $g(t + \cdot)$ ter $f(t + \cdot)$ (ki sta ravno tako Borelovo merljivi in lokalno integrabilni).

Opomba: Če $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, potem vidimo, da ima M neodvisne multiplikativne prirastke, medtem ko ima A neodvisne aditivne prirastke.

3. (25 točk) Naj bo $\{a, b\} \subset (0, \infty)$, $N \sim \text{PP}(\rho)$, kjer je $\rho(t) = ae^{-bt}$ za $t \in [0, \infty)$. Naj bo še $\{s, t\} \subset [0, \infty)$, $s < t$. Pogojno na dogodku $\{N_t - N_s = 2\}$ določi porazdelitev (npr. porazdelitveno funkcijo) $S_{N_s+2} - S_{N_s+1}$, kjer so $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kot običajno prihodni časi procesa N . Če ne gre v splošnem naredi vsaj za primer $s = 0$.

Rešitev. Proces $N' := (N_{s+u} - N_s)_{u \in [0, \infty)}$ je $\text{PP}(\rho')$, kjer je $\rho'(u) = ae^{-bs}e^{-bu}$, $u \in [0, \infty)$. Naprej je v očitnih oznakah $S_{N_s+2} - S_{N_s+1} = S'_2 - S'_1$ in $N_t - N_s = N'_{t-s}$. Brez škode za splošnost torej smemo privzeti, in bomo privzeli, da je $s = 0$ (če želimo splošen rezultat moramo na koncu samo zamenjati t z $t - s$ in a z ae^{-bs}). Naprej, pogojno na $\{N_t = 2\}$ je porazdelitev $S_2 - S_1$ enaka porazdelitvi razlike maksimuma in minimuma U_1 in U_2 , ki sta neodvisni enako porazdeljeni, absolutno zvezni, z gostoto

$$f(u) = \mathbb{1}_{(0,t]}(u) \frac{be^{-bu}}{1 - e^{-bt}}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sledi, da je za $v \in [0, t)$, $\mathbb{P}(S_2 - S_1 > v | N_t = 2) = \mathbb{P}(U_2 - U_1 > v) + \mathbb{P}(U_1 - U_2 > v) = 2\mathbb{P}(U_2 - U_1 > v)$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{t-v} \frac{be^{-bu}}{1 - e^{-bt}} \int_{v+u}^t \frac{be^{-bw}}{1 - e^{-bt}} dw du = 2 \int_0^{t-v} \frac{be^{-bu}}{1 - e^{-bt}} \frac{e^{-b(v+u)} - e^{-bt}}{1 - e^{-bt}} du \\ &= \frac{e^{-bv}(1 - e^{-2b(t-v)}) - 2e^{-bt}(1 - e^{-b(t-v)})}{(1 - e^{-bt})^2} = e^{-bv} \left(\frac{1 - e^{-b(t-v)}}{1 - e^{-bt}} \right)^2. \end{aligned}$$

(Opazimo, da rezultat ne zavisi od a /kot pričakovano/.)

4. (25 točk) Naj bo N prenovitveni proces prirejen zaporedju $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.-s porazdelitveno funkcijo F -p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, $F(0) < 1$. Naj

bo $J_1 := \inf\{t \in (0, \infty) : N_t > N_0\}$ (čas prvega skoka procesa N /strogo po času 0/). Porazdelitveno funkcijo J_1 izrazi s F .

Rešitev. Za $u \in [0, \infty)$ je $P(J_1 > u) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T_1 = \dots = T_k = 0, T_{k+1} > u) = \sum_{k=0}^{\infty} F(0)^k (1 - F(u)) = (1 - F(u)) / (1 - F(0))$, in torej $F_{J_1}(u) = P(J_1 \leq u) = 1 - (1 - F(u)) / (1 - F(0))$ ($= P(T_1 \leq u | T_1 > 0)$). **Opomba.** Povedati se da veliko več. Glej http://www.fmf.uni-lj.si/~vidmarm/Entries_into_measurable_sets_for_iid.pdf.