

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

18. junij 2019

1. Naj bo $p \in (0, 1]$, $q \in (0, 1)$. Naj bo $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-geom $_{\mathbb{N}}(p)$ -p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{N}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$.
 - (a) (10 točk) Naj bo $R \sim \text{geom}_{\mathbb{N}}(q)$ z vrednostmi v $\mathbb{N}$ neodvisna od T . Določi porazdelitev S_R . **Pomoč.** Npr. rodovne funkcije.
 - (b) **Redčenje/markiranje Bernoullijevega procesa.** Proces $N = (N_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definirajmo s tem, da postavimo, za $n \in \mathbb{N}_0$, $N_n := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_k \leq n)$. Pravimo, da je $N \sim \text{BP}(p)$ (N je porazdeljen kot Bernoullijev proces s parametrom p). Naj bo še $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-Ber(q)-p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\{0, 1\}$, neodvisno od T , in definirajmo za $i \in \{0, 1\}$ proces $N^i = (N_n^i)_{n \in \mathbb{N}_0}$ s tem, da postavimo, za $n \in \mathbb{N}_0$, $N_n^i := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(S_k \leq n) \mathbb{1}(X_k = i)$.
 - (i) (10 točk) Ali je $N^1 \sim \text{BP}(r)$ za ustrezen r ; če da, za kateri r ? Razloži! **Nasvet:** Kaj veš povedati o medprihodnih časih procesa N^1 ?
 - (ii) (5 točk) Ali sta N^0 in N^1 neodvisna? **Namig.** Oglej si dogodka $\{N_1^0 = 1\}$ in $\{N_1^1 = 1\}$.

Rešitev. Naj bo $r \in (0, 1]$. Potem je $\mathbb{E}r^{T_1} = \sum_{k=1}^{\infty} r^k p(1-p)^{k-1} = \frac{rp}{1-(1-p)r}$ in (posledično) s pogojevanjem na R , izrabljajoč neodvisnost R od T , $\mathbb{E}r^{S_R} = \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^{k-1} \left(\frac{rp}{1-(1-p)r}\right)^k = \frac{rqp}{1-(1-qp)r}$. Tedaj (rodovna funkcija določa porazdelitev) $S_R \sim \text{geom}_{\mathbb{N}}(qp)$.

[Alternativno – bolj intuitivno, a (kot se zdi) na formalni ravni težje, imamo kot sledi. (Tiho bomo ignorirali določene dogodke z verjetnostjo nič (vendar nikoli več kot števno mnogo teh).) Porazdelitev zaporedja T si lahko, po krepki lastnosti Markova za nep zaporedja, mislimo kot porazdelitev zaporedja $\tilde{T} = (\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ časov med prihodi enk v zaporedju $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.-Ber(p)-p. slučajnih spremenljivk (konstrukcija Bernoullijevega procesa): $\tilde{S}_0 := 0$ in induktivno, za $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{S}_{n+1} := \inf\{k \in \mathbb{N} : k > \tilde{S}_n \text{ in } Y_k = 1\}$; nato $\tilde{T}_n := \tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$. Če sedaj namesto tega čakamo na prvo enko v zaporedju $(X_i Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, kjer je $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-Ber(q)-p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\{0, 1\}$, neodvisno od Y , potem bo, z indukcijo, iz neodvisnosti X in Y , ta čas v porazdelitvi enak porazdelitvi S_R : on je namreč omega-po-omega enak vsoti $\sum_{i=1}^{\tilde{R}} \tilde{T}_i$, kjer je $\tilde{R} := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_{\tilde{S}_n} = 1\}$, $\tilde{R}$ pa je neodvisna of Y in ima porazdelitev $\text{geom}_{\mathbb{N}}(q)$. Res. Po krepki lastnosti Markova za zaporedje X in filtracijo $\mathcal{F}^X \vee \sigma(Y)$ je $\square_{\tilde{S}_k} X$ neodvisen od $(\mathcal{F}^X \vee \sigma(Y))_{\tilde{S}_k}$, in enako porazdeljen kot X , za vse $k \in \mathbb{N}$; $X_{\tilde{S}_n} = (\square_{\tilde{S}_{n-1}} X)(\tilde{T}_n)$ za $n \in \mathbb{N}$ (glej sestavek “Krepka lastnost Markova za nep zaporedja”). Z indukcijo sledi, da so $X_{\tilde{S}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, n.e.-Ber(q)-p., neodvisne od Y (upoštevamo, da je $H_Z \sim \text{Ber}(q)$ in neodvisna od

σ -algebre $\mathcal{G}$, brž ko je Z z vrednostmi v $\mathbb{N}$ merljiva glede na $\mathcal{G}$, ter $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.-Ber(q)-p. slučajnih spremenljivk neodvisno od $\mathcal{G}$.)]

Da je $N^1 \sim \text{Ber}(qp)$ sledi iz konstrukcije Bernoullijevega procesa (glej del med [])] ali pa to vidimo kot sledi. Po krepki lastnosti Markova za filtracijo $\mathcal{F}^X$ in zaporedje X , ter z indukcijo, so zaporedni časi čakanja $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ na enke v zaporedju X n.e.-geom $_{\mathbb{N}}(q)$ -p. slučajne spremenljivke. Medprihodni časi v procesu N^1 so torej z indukcijo, po prejšnji točki, in krepki lastnosti Markova za zaporedje T ter filtracijo $\mathcal{F}^T \vee \sigma(X)$, n.e.-geom $_{\mathbb{N}}(qp)$ -p. slučajne spremenljivke. Trditev sledi.

Za zadnji del: $\{N_1^0 = 1\}$ in $\{N_1^1 = 1\}$ sta oba dogodka s strogo pozitivno verjetnostjo (namreč $p(1-q)$ in pq), njun presek pa je nemogoč. Torej N^0 in N^1 nista neodvisna.

2. (25 točk) Naj bo $\{\lambda, t_0\} \subset (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$. Izračunaj $\mathbb{E}[N_{3t_0} - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4]$.

Rešitev. $\mathbb{E}[N_{3t_0} - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4] = \mathbb{E}[N_{3t_0} - N_{2t_0} + N_{2t_0} - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4]$, kar je zaradi neodvisnosti prirastkov od zgodovine $= \mathbb{E}[N_{3t_0} - N_{2t_0}] + \mathbb{E}[N_{2t_0} - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4] = \lambda t_0 + \mathbb{E}[4 - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4]$. Končno je iz lastnosti vrstilnih statistik $\mathbb{E}[4 - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4] = 2$. [[Lahko pa slednje tudi direktno poračunamo: $\mathbb{E}[4 - N_{t_0} | N_{2t_0} = 4] = \frac{\mathbb{E}[4 - N_{t_0}; N_{2t_0} = 4]}{\mathbb{P}(N_{2t_0} = 4)} = \frac{\sum_{i=0}^4 \mathbb{E}[4-i; N_{2t_0} - N_{t_0} = 4-i, N_{t_0} = i]}{\frac{(2\lambda t_0)^4}{4!} e^{-2\lambda t_0}} = \frac{\sum_{i=0}^4 (4-i) \mathbb{P}(N_{2t_0} - N_{t_0} = 4-i) \mathbb{P}(N_{t_0} = i)}{\frac{(2\lambda t_0)^4}{4!} e^{-2\lambda t_0}} = \frac{1}{2^4} \sum_{i=0}^4 (4-i) \binom{4}{i} = 2$.]]

3. (25 točk) Naj bo $\{a_1, a_2, b\} \subset (0, \infty)$. Vzporedno potekata neodvisna Poissonova procesa $N^1 \sim \text{PP}(\rho_1)$ in $N^2 \sim \text{PP}(\rho_2)$; $\rho_i(t) = a_i e^{-bt}$ za $t \in [0, \infty)$, $i \in \{1, 2\}$. Določi verjetnost, da bo prvi prihod v procesu N^1 strogo pred prvim prihodom procesa N^2 .

Rešitev. V očitnih oznakah nas zanima $\mathbb{P}(S_1^1 < S_1^2)$. Zaradi neodvisnosti je ta verjetnost enaka (pozor (!): $S_1^2 = \infty$ s pozitivno verjetnostjo, enako za S_1^1) $\int_{[0, \infty)} \mathbb{P}(s < S_1^2) \mathbb{P}_{S_1^1}(ds) = \int_{[0, \infty)} \mathbb{P}(N_s^2 = 0) \mathbb{P}_{S_1^1}(ds) = \int_{[0, \infty)} e^{-\frac{a_2}{b}(1-e^{-bs})} \mathbb{P}_{S_1^1}(ds)$. Po drugi strani je S_1^1 , na $\{S_1^1 < \infty\}$, absolutno zvezna z znano gostoto, in dobimo $\mathbb{P}(S_1^1 < S_1^2) = \int_0^\infty e^{-\frac{a_2}{b}(1-e^{-bs})} a_1 e^{-bs} e^{-\frac{a_1}{b}(1-e^{-bs})} ds = -\frac{a_1}{a_1 + a_2} e^{-\frac{a_1 + a_2}{b}(1-e^{-bs})} \Big|_{s=0}^\infty = \frac{a_1}{a_1 + a_2} (1 - e^{-\frac{a_1 + a_2}{b}})$.

4. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $p \in [0, 1)$. Hišnik menja žarnice. Življenjske dobe žarnic so n.e.-Exp(λ)-p. slučajne spremenljivke z vrednostmi v $(0, \infty)$. Pri vsaki menjavi, vsakič neodvisno, neodvisno tudi od življenjskih dob žarnic, hišnik razbije žarnico z verjetnostjo p (in menja dokler mu ne uspe). Ob času 0 je bila ravno (uspešno, brez razbitja) instalirana sveža žarnica. Čase menjav žarnic zanemarimo. Za $t \in [0, \infty)$ naj bo N_t (oz. M_t) število žarnic, ki jih je hišnik menjal (oz. zamenjal ne da jih razbije) na intervalu $(0, t]$. Za $t \in [0, \infty)$ določi $\mathbb{E}[N_t]$. Določi tudi porazdelitev procesa M (povej za kateri proces gre)!

Rešitev. M je homogen Poissonov proces z intenziteto λ . N je prenovitveni proces z zaostankom prirejen zaporedju $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, kjer je $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ in $T_2 \sim p\delta_0 + (1-p)\text{Exp}(\lambda)$. Naj bo F porazdelitvena funkcija T_2 in G porazdelitvena funkcija T_1 . Potem je $\hat{G}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ in $\hat{F}(s) = p + (1-p)\frac{\lambda}{s+\lambda}$ za $s \in [0, \infty)$. Sledi, da je $\frac{\hat{G}(s)}{1-\hat{F}(s)} = \frac{\lambda}{s(1-p)}$ in zato (običajni argumenti ...) $\mathbb{E}[N_t] = \frac{\lambda}{1-p}t$, $t \in [0, \infty)$. [[Alternativni izračun upanja $\mathbb{E}[N_t]$. Za $i \in \mathbb{N}$ naj bo X_i število žarnic, ki jih zamenja hišnik, ko pregori i -ta žarnica. Potem je $N_t = \sum_{i=1}^{M_t} X_i$. Iz raznih krepih lastnosti Markova sledi, da so X_i , $i \in \mathbb{N}$, n.e.-geom $_{\mathbb{N}}(1-p)$ -p. slučajne spremenljivke, neodvisne od M . Tedaj je po Waldovi identiteti $\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[M_t]\mathbb{E}[X_1] = \frac{\lambda t}{1-p}$.]]