

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 3. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

19. avgust 2019

1. (25 točk) Naj bo $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $\lambda \in (0, \infty)$, in naj bo Y slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\{-1, 1\}$, $P(Y = 1) = 1/2$, neodvisna od N . Definirajmo “slučajen telegrafski signal”:

$$X_t := Y(-1)^{N_t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Določi $E[X_t]$ in $\text{cov}(X_t, X_s)$ [Ali sta X_s in X_t neodvisni?], $\{s, t\} \subset [0, \infty)$.

Rešitev. Računamo: $E[X_t] = E[Y(-1)^{N_t}] = E[Y]E[(-1)^{N_t}] = 0$. Posledično je (naj bo $s \leq t$, brez škode za splošnost) $\text{cov}(X_t, X_s) = E[X_s X_t] = E[Y^2(-1)^{N_t - N_s}(-1)^{2N_s}] = E[(-1)^{N_t - N_s}] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)}$. Seveda X_s in X_t ne moreta biti neodvisni, ker njuna kovarianca ni 0.

2. (25 točk) Naj bo $\{t_0, \lambda, b, r\} \subset (0, \infty)$. Preizkusi prihajajo skladno s prihodnimi časi homogenega Poissonovega procesa N z intenziteto λ . Za $i \in \mathbb{N}$ prestanemo i -ti preizkus, če je njegova zahtevnost X_i manjša ali enaka naši stopnji pripravljenosti za soočenje z njim v trenutku, ko do njega pride. Ob času $t \in [0, \infty)$ je ta stopnja pripravljenosti enaka $r(1 - e^{-bt})$. Slučajne spremenljivke X_i , $i \in \mathbb{N}$, imajo vrednosti v $(0, r)$, so n.e.- $\text{Unif}((0, r))$ -p., neodvisne od N . Določi verjetnost, da na časovnem intervalu $(0, t_0]$ prestanemo vse preizkuse.

Rešitev. Naj bo $R = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_A((S_i, X_i))$, kjer je $A = \{(s, x) \in (0, t_0] \times (0, r) : r(1 - e^{-bs}) < x\}$. Tedaj nas zanima $P(R = 0)$. Iz markiranja sledi, da je $R \sim \text{Pois}(\lambda \int_0^{t_0} ds \int_{r(1-e^{-bs})}^r dz/r)$. Torej $P(R = 0) = \exp\{-\lambda \int_0^{t_0} e^{-bs} ds\} = \exp\{-\frac{\lambda}{b}(1 - e^{-bt_0})\}$.

3. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $b \in (0, \infty)$, $b < \lambda^{-1}$. Piškote delijo v skupni sobi ob prihodnih časih Poissonovega procesa s funkcijo intenzitete ρ , pri čemer je za $t \in [0, \infty)$, $\rho(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$. Na delitev smo pripravljeni čakati največ b časa po našem prihodu v skupno sobo. Ob katerem času $T \in [0, \infty)$ naj pridemo v skupno sobo, da bo verjetnost, da bomo deležni delitve piškotov kar največja? Če ta optimalen čas označimo z $g(\lambda, b)$, koliko je $\lim_{b \downarrow 0} g(\lambda, b)$ (λ fiksiran)? (Če piškote delijo ravno ob našem vstopu v skupno sobo, jih nismo deležni; obratno, če jih delijo, ko ravno odhajamo, pa jih dobimo.)

Rešitev. Omenjena verjetnost je $1 - \mathbf{P}(N_{T+b} - N_T = 0) = 1 - e^{-\int_T^{T+b} \rho(u) du}$. Maksimizirati slednje pomeni maksimizirati $\int_T^{T+b} \rho(u) du$. Očitno je $\lim_{T \rightarrow \infty}$ tega izraza enaka nič (npr. ker ρ eksponentno usiha, in je zato integrabilna). Naprej, ρ na $[0, \lambda^{-1}]$ strogo narašča in $b < \lambda^{-1}$, sledi, da optimalen T ne bo na robu (ne bo 0). Torej bo dovolj preveriti stacionarne točke: $\frac{\partial}{\partial T} \int_T^{T+b} \rho(u) du = 0$. Iz osnovnega izreka analize je slednji pogoj ekvivalenten $\rho(T+b) - \rho(T) = 0$, viz. $(T+b)e^{-\lambda b} = T$, oz. $T = b/(e^{\lambda b} - 1)$, kar je naš optimalen T . V limiti $b \downarrow 0$ dobimo seveda λ^{-1} , maksimizator ρ -ja.

4. Naj bo N prenovitveni proces prirejen zaporedju $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.-s porazdelitveno funkcijo F -p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, $F(0) < 1$. Naj bosta $(A_t)_{t \in [0, \infty)}$ in $(E_t)_{t \in [0, \infty)}$ procesa starosti in presežkov v N . Naj bo še $\{\eta_1, \eta_2\} \subset [0, \infty)$, $\eta_1 \leq \eta_2$.
- (a) (12 točk) Zapiši prenovitveno enačbo za funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, dano s predpisom $g(t) := \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t) \mathbf{P}(\eta_2 A_t \geq E_t > \eta_1 A_t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- (b) (13 točk) Predpostavi, da je $\mu := \mathbf{E}[T_1] < \infty$ in F nearitmetična. Določi $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$.

Rešitev. (a). Za $t \in [0, \infty)$ je $g(t) = \int_{[0, t]} g(t-s) dF(s) + \mathbf{P}(\eta_2 t \geq T_1 - t > \eta_1 t, T_1 > t) = \int_{[0, t]} g(t-s) dF(s) + \mathbf{P}((1+\eta_2)t \geq T_1 > (1+\eta_1)t) = \int_{[0, t]} g(t-s) dF(s) + F((1+\eta_2)t) - F((1+\eta_1)t)$. Torej je $g = g \star F + h$, kjer je $h(t) = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)(F((1+\eta_2)t) - F((1+\eta_1)t))$, $t \in [0, \infty)$.

(b). Funkciji g in h sta lokalno omejeni (celo omejeni) in Borelovo merljivi. Funkcija h je nenegativna, zvezna skoraj povsod (celo povsod razen v števno mnogo točkah, ki ustezajo (modulo faktorja $1+\eta_1$, $1+\eta_2$) nezveznostim nepadajoče funkcije F) in omejena navzgor s funkcijo $(\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)(1 - F((1+\eta_1)t)))$, ki je nenaraščajoča in integrabilna (ker je $\mu < \infty$). Kot taka je d.R.i.; Smithov izrek nam pove, da je potem $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \int_0^\infty h(t) dt / \mu = (1+\eta_1)^{-1} - (1+\eta_2)^{-1} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{(1+\eta_1)(1+\eta_2)}$.