

# **Problem razvoza**

Pisni izdelek pri predmetu *Komuniciranje v matematiki*

BENISA RISOVIĆ

5. januar, 2021

# 1 Uvod

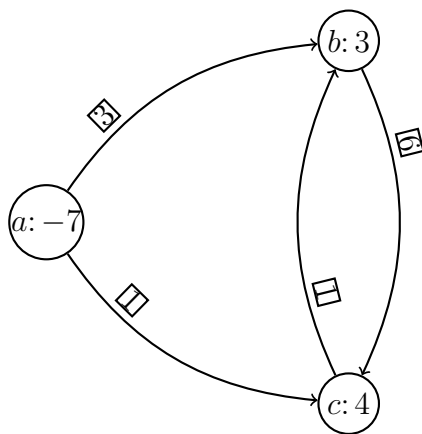
Stroški logistike predstavljajo velik del končnih stroškov številnih podjetij. Problem razvoza sodi med linearne optimizacijske probleme. Na splošno pomeni optimirati narediti neko stvar tako, da je ta najugodnejša oziroma najboljša glede na dane možnosti.

Pri optimizacijskem problemu iščemo ekstrem neke realne funkcije, ki ji bomo rekli *namenska funkcija*, na neki množici, katere elemente imenujemo *dopustne rešitve*.

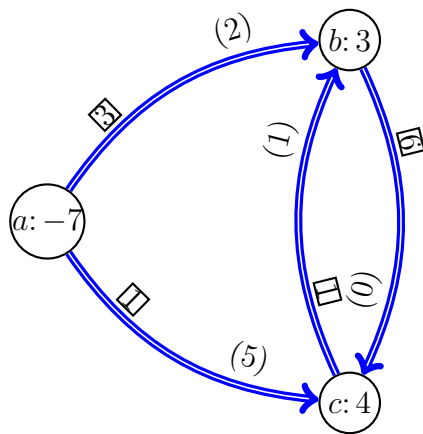
## 1.1 Definicija problema razvoza

Dano je transportno omrežje, po katerem prevažamo določeno dobrino. V nekaterih krajih je več porabijo kot je pridobijo in povprašujejo po njej, v drugih je več pridobijo kot je porabijo in jo ponujajo. Predpostavljamo, da je skupno povpraševanje enako skupni ponudbi in da za vsako povezavo v omrežju poznamo ceno prevoza po njej. Koliko enot dobrine naj pripeljemo po posameznih povezavah, da bomo z najmanjšimi prevoznimi stroški zadostili ponudbi in povpraševanju v vseh krajih omrežja?

**ZGLED 1.1.** Na spodnji sliki je omrežje s tremi vozlišči in štirimi povezavami. Uteži v vozliščih  $a$ ,  $b$  in  $c$  predstavljajo povpraševanje (če so pozitivne) oziroma ponudbo (če so negativne), uteži v kvadratih na povezavah predstavljajo cene prevoza enote dobrine vzdolž povezave. V skladu s predpostavko o podatkih je vsota uteži v vozliščih enaka 0.



Naslednja slika predstavlja enega izmed možnih razvozov (uteži v oklepajih na povezavah):



Razvoz je *dopusten*, če je nenegativen in če zadosti povpraševanju in ponudbi v vseh vozliščih. Torej mora biti razlika med količino dobrine, ki jo v neko vozlišče  $v$  pripeljemo, in količino dobrine, ki jo iz  $v$  odpeljemo, enaka povpraševanju oziroma ponudbi v vozlišču  $v$ . Preverimo to za razvoz na sliki:

$$\begin{aligned} \text{levo vozlišče: } & 0 - (2 + 5) = -7 \\ \text{desno zgornje vozlišče: } & (2 + 1) - 0 = 3 \\ \text{desno spodnje vozlišče: } & (5 + 0) - 1 = 4 \end{aligned}$$

Dobljene enačbe imenujemo *Kirchoffovi zakoni*. Razvoz na sliki je torej dopusten, njegova cena pa znaša  $3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 6 + 5 + 1 = 12$ .

**Opomba:** Predstavljeni razvoj je dopusten, ni pa najbolj optimalen (razvoz ni najcenejši).

## 1.2 Podatki problema razvoza:

1. usmerjen graf  $G = (V, E)$ ,

**DEFINICIJA 1. Usmerjen graf**  $G = (V, E)$  je  $V$  množica vozlišč, ki predstavljajo kraje in  $E$  množica povezav, ki predstavljajo enosmerne ceste med njimi.

2. za vsako vozlišče  $v \in V$  je dana utež  $b_v \in \mathbb{R}$ , ki po dogovoru predstavlja

- povpraševanje v vozlišču  $v$ , če je  $b_v > 0$ , oziroma
- ponudbo v višini  $|b_v|$  v vozlišču  $v$ , če je  $b_v < 0$ ,

3. za vsako povezavo  $e \in E$  je dana utež  $c_e \in \mathbb{R}$ , ki predstavlja ceno prevoza enote tovara vzdolž povezave  $e$ .

**Predpostavka o podatkih:**  $\sum_{v \in V} b_v = 0$  (skupno povpraševanje je enako skupni ponudbi).

**Iščemo:** za vsako povezavo  $e \in E$  **razvoz**  $x_e \in \mathbb{R}$ , ki zadošča pogojem

1.  $x_e \geq 0$  za vse  $e \in E$  (nenegativnost),
2.  $\sum_{\substack{e \in E \\ \text{konec}(e)=v}} x_e - \sum_{\substack{e \in E \\ \text{zacetek}(e)=v}} x_e = b_v$  za vse  $v \in V$  (Kirchhoffovi zakoni)

in ima med vsemi takšnimi *najmanjše* skupne prevozne stroške

$$\sum_{e \in E} c_e x_e.$$

## 2 Reševanje problema razvoza

Problem razvoza je poseben primer linearnega programa. Najbolj enostaven način za reševanje je uporaba *simpleksne metode na omrežjih* po kateri problem razvoza rešujemo v originalni obliki neposredno na danem grafu.

**IZREK 2.1.** Podgraf  $T$  grafa  $G$  imenujemo **vpeto drevo** grafa  $G$ , če je povezan, nima ciklov in vsebuje vsa vozlišča  $G$ .

**DEFINICIJA 2.** Dopustno rešitev  $x \in \mathbb{R}^n$  problema razvoza imenujemo **drevesna dopustna rešitev** (ddr), če v grafu  $G$  obstaja vpeto drevo  $T$ , tako da je razvoz  $x$  na vseh povezavah zunaj drevesa  $T$  enak 0.

Denimo, da je  $x$  dopustna drevesna rešitev, ki ustreza vpetemu drevesu  $T$  (t.j.  $x_e = 0$  za vse povezave  $e \notin E(T)$ ). Izboljšati jo skušamo z minimalno spremembo vpetega drevesa, ki jo dosežemo takole: Izberemo *vstopajočo povezavo*  $e \in E(G) \setminus E(T)$  in jo dodamo drevesu  $T$ . Nastali graf  $T + e$  vsebuje natanko en cikel  $C$ . Na tem ciklu izberemo *izstopajočo povezavo*  $f \neq e$  in jo odstranimo iz grafa  $T + e$ . Tako dobimo novo vpeto drevo  $T + e - f$ , ki enolično določa novo dopustno rešitev, po možnosti cenejšo od prejšnje ddr  $x$ .

## 2.1 Osnovna varianta simpleksne metode na omrežjih

Za lažjo interpretacijo simpleksne metode na omrežjih bomo v nadaljevanju povezavo  $e = v_i v_j$  krajše pisali v obliki  $e = ij$ .

**Algoritem za iskanje najbolj optimalnega razvoza na omrežju:**

1. V vozliščih  $v_1, v_2, \dots, v_m$  določimo *potencialne cene prevoza*  $y_1, y_2, \dots, y_m$  kot rešitev sistema linearnih enačb

$$y_1 = 0, \\ y_i + c_{ij} = y_j \text{ za vse povezave } ij \text{ drevesa } T.$$

2. Vstopajočo povezavo  $e$  izberemo med tistimi povezavami  $ij$  zunaj drevesa  $T$ , za katere je

$$y_i + c_{ij} < y_j$$

3. Graf  $T + e$  vsebuje natanko en cikel  $C$ . Povezave cikla  $C$  delimo na *preme* (ki določajo isto orientacijo cikla  $C$  kot  $e$ ) in *obratne* (ki določajo nasprotno orientacijo cikla  $C$  kot  $e$ ). Naj bo

$$t := \min\{x_{uv}; uv \text{ obratna povezava na } C\}.$$

Izstopajočo povezavo  $f$  izberemo med tistimi obratnimi povezavami  $uv$ , pri katerih je dosežen zgornji minimum (t.j. tistimi, za katere je  $x_{uv} = t$ ).

4. Razvoz na premih povezavah povečamo za  $t$ , na obratnih zmanjšamo za  $t$ . Drevo  $T$  nadomestimo z drevesom  $T + e - f$  in se vrnemo na korak 1.

Korake 1 - 4 ponavljamo, dokler

A) na 2.koraku ne moremo izbrati vstopajoče povezave, ker za vse povezave  $ij$  zunaj drevesa  $T$  velja  $y_i + c_{ij} \geq y_j$ , ali pa

B) na 3.koraku ne moremo izbrati izstopajoče povezave, ker na ciklu  $C$  ni nobenih obratnih povezav.

### 3 Neomejenost problema razvoza

Neomejenost problema razvoza pomeni, da nam prevoznik plača poljubno veliko vsoto, če le pošljemo dovolj veliko količino dobrine naokrog po nekem negativnem ciklu  $C$  grafa  $G$ . V praksi je torej obstoj negativnih ciklov v prevoznih omrežjih malo verjeten.

**DEFINICIJA 3.** Naj bo  $C$  cikel v usmerjenem grafu  $G$  z utežmi na povezavah. Če so vse povezave na ciklu  $C$  enako usmerjene, vsota njihovih uteži pa je negativna, je  $C$  **negativen cikel**.

**IZREK 3.1.** Če pri reševanju problema razvoza s simpleksno metodo na omrežjih cikel  $C$  v grafu  $T + e$  ne vsebuje obratnih povezav, je  $C$  negativen cikel v grafu  $G$ .

**POSLEDICA 3.2.** Če pri reševanju problema razvoza s simpleksno metodo na omrežjih na nekem koraku cikel  $C$  v grafu  $T + e$  ne vsebuje obratnih povezav, je problem **neomejen**.

**DOKAZ.** Po izreku 3.1. je  $C$  negativen cikel v grafu  $G$ . Če razvoz na vseh povezavah cikla  $C$  povečamo za isto število  $t > 0$ , Kirchoffovi zakoni ostanejo veljavni in s tem rešitev dopustna, prevozni stroški pa se zmanjšajo za

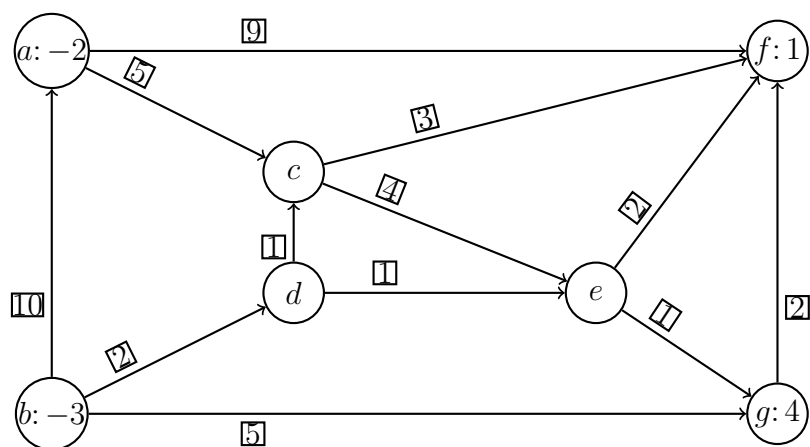
$$t \cdot \left| \sum_{uv \in E(C)} c_{uv} \right| \text{ denarnih enot.}$$

Ker gre  $t$  proti  $\infty$ , gredo prevozni stroški  $-\infty$ , torej je v tem primeru problem razvoza neomejen.  $\square$

### 4 Problematika razvoza v logističnih podjetjih

**Zgled uporabe problema razvoza v logistiki:** Uspešno logistično podjetje razpiše oglas za delovno mesto logističnega tehnika. Podjetje od kandidatov zahteva rešitev spodnjega problema, kot ključ za razgovor. Če seanimate za omejeno delovno mesto, poskusite rešiti sledeč problem.

**Problem:** S pomočjo simpleksne metode na omrežjih poiščite najcenejši razvoz po spodnjem omrežju. Kolikšna je cena tega razvoza?



Rešitev: 30.

## 5 Viri

- <http://vlado.fmf.uni-lj.si/vlado/optim/opt1.pdf>
- [https://sl.wikipedia.org/wiki/Optimizacija\\_\(matematika\)](https://sl.wikipedia.org/wiki/Optimizacija_(matematika))
- [https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/89836/mod\\_resource/content/4/ProblemRazvoza1.pdf](https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/89836/mod_resource/content/4/ProblemRazvoza1.pdf)
- [https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/90439/mod\\_resource/content/3/PR2.pdf](https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/90439/mod_resource/content/3/PR2.pdf)