

Splošna topologija, 2. izpit

11. junij 2021

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označite, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veste, pustite kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Unija vseh zaprtih podmnožic neskončnega topološkega prostora je zaprta.



Če sta grafa dveh polinomov kot funkcij $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ homeomorfna, morata biti stopnji polinomov enaki.



Obstaja zvezna surjekcija $(0, 1) \rightarrow [0, 1]$.



Obstaja zvezna surjekcija $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$.



Fréchetov prostor, v katerem je možno ostro ločiti vsaki dve disjunktni zaprti podmnožici, je Hausdorffov.



Če je X regularen podprostor prostora Y , je tudi Y regularen.



Produkt kompaktnega prostora s povezanim prostorom je kompakten in povezan.



Obstaja lokalno povezan prostor X , ki ima komponento za povezanost $K \subseteq X$, za katero velja $K = \text{Meja}(K)$.



Če je prostor X Hausdorffov, je prostor $\mathcal{C}(X, X)$, opremljen s kompaktno-odprto topologijo, tudi Hausdorffov.



Če je X normalen prostor, za vsako izbiro različnih $x_1, \dots, x_n \in X$ in $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ obstaja zvezna funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, da velja $f(x_1) = a_1, \dots, f(x_n) = a_n$.

2. naloga (30 točk)

Označimo $B_a := [-a, a] \times [-a, a]$ in

$$\mathcal{B} := \{B_a \mid a \in \mathbb{R} \wedge a > 0\}.$$

- a) (10 točk) Preverite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije τ na množici $\mathbb{R}^2$.
- b) (5 točk) Podajte zaprtje enojca $\{(1, 2)\}$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \tau)$.
- c) (5 točk) Dokažite, da je vsak $B_a \in \mathcal{B}$ kompakten podprostor prostora $(\mathbb{R}^2, \tau)$.
- d) (10 točk) Ali je prostor $(\mathbb{R}^2, \tau)$ 1-števen, 2-števen oz. separabilen? Odgovore utemeljite.

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$X := \left\{ \left(r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \mid n \in \mathbb{N} \wedge r \in [0, 1] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

podprostor evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$. Ali je prostor X 1-števen, povezan, lokalno povezan, kompakten oz. lokalno kompakten? Odgovore utemeljite.

4. naloga (25 točk)

Metrični prostor se imenuje **Heine-Borelov**, kadar je vsak njegov omejen zaprt podprostor kompakten.

- a) (5 točk) Podajte primer metričnega prostora, ki ni Heine-Borelov. Odgovor utemeljite.
- b) (10 točk) Dokažite: metrični prostor je Heine-Borelov natanko tedaj, ko je vsaka njegova zaprta krogla kompaktna.
- c) (10 točk) Dokažite: vsak Heine-Borelov metrični prostor je poln.