

## Splošna topologija, 1. kolokvij

18. december 2020

### 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označite, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veste, pustite kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Topologije so zaprte za končne unije in končne preseke.



Notranjost množice je vedno prava podmnožica zaprtja množice.



Vse končne podmnožice dane množice tvorijo bazo neke topologije.



Vsak 1-števen prostor je možno vložiti v evklidsko premico  $\mathbb{R}$ .



Vsak prostor s topologijo končnih komplementov je separabilen.



Vsak podprostor produkta dveh regularnih prostorov je Hausdorffov.



Prostora  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{N}^2$  sta homeomorfna.



Prostora  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^2$  sta homeomorfna.



Če povezanemu prostoru odvzamemo eno točko, vedno postane nepovezan.



Vsak povezan separabilen metrični prostor ima povezano števno gsto podmnožico.

### 2. naloga (40 točk)

Označimo

$$\mathcal{B} := \{(a, \infty) \mid a > 0\} \cup \{(-\infty, b) \mid b < 0\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

a) (10 točk) Preverite, da je  $\mathcal{B}$  baza neke topologije na množici  $\mathbb{R}$  (označimo to topologijo s  $\tau$ ).

b) (5 točk) Podajte notranjost in zaprtje intervala  $(-\infty, 2)$  v prostoru  $(\mathbb{R}, \tau)$ .

c) (5 točk) Dokažite, da je prostor  $(\mathbb{R}, \tau)$  1-števen, 2-števen in separabilen.

d) (20 točk) Katerim izmed lastnosti  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ , povezanost s potmi, kompaktnost zadošča prostor  $(\mathbb{R}, \tau)$ ? Odgovore utemeljite.

### 3. naloga (20 točk)

Naj bo

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge x > 0 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$$

podprostor evklidskega prostora  $\mathbb{R}^3$ . Dokažite, da je prostor  $X$  možno zaprto vložiti v evklidsko ravnino  $\mathbb{R}^2$ .

### 4. naloga (20 točk)

Naj bo  $X$  topološki prostor in  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna preslikava ( $\mathbb{R}$  je opremljen z evklidsko topologijo). Dokažite naslednji trditvi.

**a) (10 točk)** Če je  $X$  povezan in ima zaloga vrednosti  $f$  več kot eno točko, je  $X$  nešteven. Izpeljite od tod, da je vsak povezan metrični prostor z več kot eno točko nešteven.

**b) (10 točk)** Če je  $X$  neprazen kompakten, preslikava  $f$  ni odprta.