

Splošna topologija, 2. kolokvij

7. julij 2021

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označite, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veste, pustite kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Za vsako podmnožico topološkega prostora velja, da je njena notranjost prava podmnožica njenega zaprtja.



Če se dve podmnožici topološkega prostora sekata, se tudi njuni meji sekata.



Produkt prostora $\mathbb{R}$ z evklidsko topologijo in prostora $\mathbb{R}^2$ z evklidsko topologijo je prostor $\mathbb{R}^3$ z evklidsko topologijo.



Vsak metrični prostor je T_0 .



Topološki prostor je T_4 natanko tedaj, ko je normalen.



Kompakten Fréchetov prostor je Hausdorffov.



Diskreten prostor je lokalno povezan s potmi.



Trivialen prostor je lokalno povezan s potmi.



Če je X normalen, $a \in X$ in $U \subseteq X$ okolica točke a , potem obstaja zvezna funkcija $f: X \rightarrow [0, \infty)$, da je $f(a) = 0$ in $f^*([0, 1]) \subseteq U$.



Obstaja zaporedje realnih polinomov, ki po točkah konvergira k funkciji $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. naloga (30 točk)

Za $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ definiramo

$$d((a, b), (c, d)) = |a - c| + \lceil |b - d| \rceil,$$

kjer $\lceil x \rceil$ označuje navzgor zaokroženo število x .

a) (10 točk) Preverite, da je d metrika na množici $\mathbb{R}^2$.

b) (10 točk) Ali je podprostor $[0, 1] \times [0, 1]$ prostora $(\mathbb{R}^2, d)$ povezan? Ali je kompakten? Odgovora utemeljite.

c) (10 točk) Ali je prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ 1-števen, 2-števen oz. separabilen? Odgovore utemeljite.

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$X_a := \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, 2] \mid y = ax + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

podprostor evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$. Za katere $a, b \in \mathbb{R}$ sta prostora X_a in X_b homeomorfna, za katere ne? Odgovore utemeljite.

4. naloga (25 točk)

Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ kompakten podprostor prostora $\mathcal{C}(X, Y)$, opremljenega s kompaktno-odprto topologijo. Dokažite naslednji trditvi.

a) (10 točk) Za vsak $a \in X$ je $\{f(a) \mid f \in \mathcal{K}\}$ kompakten podprostor prostora Y .

b) (15 točk) Če je X kompakten Hausdorffov in je $V \subseteq Y$ odprta podmnožica v Y , potem je $\bigcap_{f \in \mathcal{K}} f^*(V)$ odprta podmnožica v X .