

Splošna topologija, 1. kolokvij

30. november 2021

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označite, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veste, pustite kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Vsak topološki prostor ima vsaj toliko zaprtih množic kot elementov.



Obstaja topologija, glede na katero je vsaka podmnožica prostora odprta natanko tedaj, ko je zaprta.



Vsaka števna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ ima prazno notranjost.



Vsaka neštevna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ ima neprazno notranjost.



Če ima zvezna preslikava inverz, je tudi ta zvezen.



Topološki prostor ne more biti homeomorfen svojemu pravemu podprostoru.



Vsak prostor je možno vložiti v Hausdorffov prostor.



Produkt dveh T_1 prostorov je T_2 prostor.



Če obstaja odprto pokritje prostora z 1-števnimi podprostori, je prostor 1-števen.



Če obstaja odprto pokritje prostora z 2-števnimi podprostori, je prostor 2-števen.

2. naloga (20 točk)

Naj bosta prostora $X := [-1, 1]^2 \setminus \{(1, 1), (-1, -1)\}$ in $Y := [-1, 1] \times \mathbb{R}$ opremljena z evklidsko topologijo. Dokazite, da sta homeomorfna.

3. naloga (30 točk)

Naj bo $\mathcal{B} := \{[0, r) \cup (\frac{1}{r}, \infty) \mid r \in \mathbb{R} \wedge r > 0\} \cup \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge 0 < a < b\}$.

a) (10 točk) Preverite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na $[0, \infty)$.

b) (10 točk) Naj bo $\tau_{\mathcal{B}}$ topologija, porojena z bazo $\mathcal{B}$. Dokažite, da je prostor $([0, \infty), \tau_{\mathcal{B}})$ možno vložiti v evklidsko ravnino $\mathbb{R}^2$.

c) (10 točk) Ali je prostor $([0, \infty), \tau_{\mathcal{B}})$ 1-števen, 2-števen, separabilen, Fréchetov, Hausdorffov? Odgovore utemeljite.

4. naloga (30 točk)

Naj bo X množica in $f: X \rightarrow X$ preslikava. Definirajmo

$$\tau := \{U \subseteq X \mid f_*(U) \subseteq U\},$$

pri čemer $f_*(U)$ označuje f -sliko podmnožice $U \subseteq X$, tj. $f_*(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$.

a) (10 točk) Preverite, da je τ topologija na množici X .

b) (10 točk) Dokažite, da je preslikava $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ zvezna in odprta.

c) (10 točk) Dokažite: če je τ trivialna topologija, je množica X končna.