

Splošna topologija, 2. kolokvij

20. januar 2022

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označite, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veste, pustite kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Če je prostor metrizabilen, je vsak njegov podprostor normalen.



Če je prostor Hausdorffov, ima vsako zaporedje v njem natanko eno limito.



Odperte krogle v metričnih prostorih so vedno povezane.



Kompakten prostor ima največ končno mnogo komponent za povezanost.



Če so v prostoru vse komponente za povezanost s potmi odprte, je povezanost prostora ekvivalentna povezanosti s potmi.



Podprostor metričnega prostora je kompakten natanko tedaj, ko je zaprt in omejen.



Normalnost se deduje na kompaktne podprostore.



Zvezna preslikava $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je konstantna ali pa je njena zaloga vrednosti homeomorfna domeni.



Obstaja primer povezanega kompaktnega Hausdorffovega prostora X in točke $a \in X$, da je $X \approx X \setminus \{a\}$.



Prostor je Hausdorffov natanko tedaj, ko je možno ostro ločiti točke od kompaktov v njem.

2. naloga (30 točk)

Prostor

$$X := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

opremimo z evklidsko topologijo, podedovano z $\mathbb{R}^2$. Ali je X regularen, kompakten, lokalno kompakten, povezan, povezan s potmi, lokalno povezan? Odgovore utemeljite.

3. naloga (20 točk)

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bosta $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ opremljena z evklidsko topologijo. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazna omejena podmnožica in $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ takšna preslikava, da je preslikava $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{če } x \in A, \\ 0, & \text{če } x \in \mathbb{R}^n \setminus A, \end{cases}$$

zvezna. Dokazite, da f zavzame svoj minimum ali svoj maksimum. Podajte primer, ko ne zavzame obojega.

4. naloga (30 točk)

Naj bo (M, d) metrični prostor in naj bo X množica vseh nepraznih omejenih podmnožic prostora M . Za $A \in X$ in $r \in \mathbb{R}$ definiramo

$$P(A, r) := \{B \in X \mid \forall b \in B. \exists a \in A. d(a, b) < r\}.$$

Naj bo τ topologija na X , porojena s predbazo $\mathcal{P} := \{P(A, r) \mid A \in X \wedge r \in \mathbb{R}\}$. Dokazite naslednji trditvi.

a) (15 točk) Prostor (X, τ) je povezan s potmi in lokalno povezan s potmi.

b) (15 točk) Prostor (M, d) je omejen $\iff$ prostor (X, τ) je kompakten.