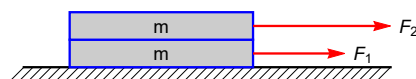


1. Na vodoravni podlagi ležita dva enaka bloka eden na drugem, glej skico. Spodnji blok povlečemo s silo F_1 , zgornji s F_2 . Določi gibanje blokov. Pri tem upoštevaj silo trenja oziroma silo lepenja med podlago in blokom in med stično ploskvo. Koeficienta trenja sta med seboj enaka. Obravnavaj ločeno:

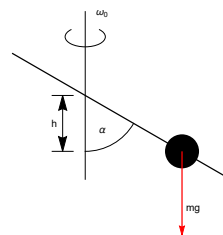
- (a) bloka se ne premakneta;
- (b) premakne se samo zgornji blok;
- (c) premakneta se oba bloka.

Kdaj nastopijo te možnosti?



2. Vodilo, ki oklepa kot α z navpičnico se enakomerno s kotno hitrostjo ω_0 vrti okrog navpične osi, po vodilu pa je brez trenja gibljiva materialna točka z maso m , glej skico.

- (a) Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati z vodikom.
- (b) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje točke vzdolž vodila.
- (c) Naj v začetnem trenutku točka miruje na presečišču osi in vodila. Določi gibanje točke.

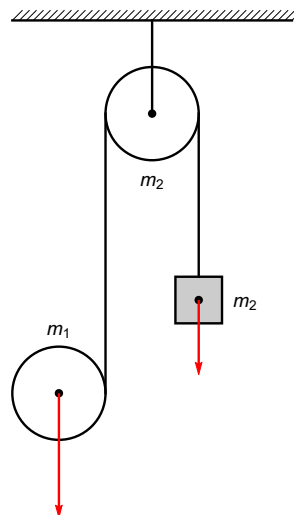


3. Izračunaj:

- (a) vztrajnostni tenzor homogenega kvadra dimenzij $a \times b \times c$ s polom v masnem središču;
- (b) vztrajnostni moment s polom v oglišču kvadra okrog osi v smeri stranice kvadra, ki ima dolžino a .

4. Na valj navijemo vrvico, na drugi konec pritrdimo utež, nato pa vrvico obesimo čez škripec tako kot kaže skica. Valj ima maso m_1 , utež in škripec pa m_2 . Valj in škripec imata enak polmer.

- (a) Zapiši enačbe gibanja.
- (b) Določi maso valja, tako da bo utež mirovala.



Rešitve

1. (a) Poglejmo prvo možnost, ko se bloka ne premakneta. Potem mora veljati $F_2 \leq kmg$ in $F_1 + F_2 \leq 2kmg$.
- (b) Naj se premakne samo zgornji blok. Potem mora veljati $F_2 > kmg$ in $F_1 + kmg \leq 2kmg$. Torej $F_1 \leq kmg$.
- (c) Poglejmo sedaj možnost, ko se premakneta oba bloka. Označimo s x položaj spodnjega, z y pa položaj zgornjega bloka. Tu obakrat merimo položaj od neke fiksne točke. Ker se bloka gibljeta, je $\dot{x} > 0$ in $\dot{y} > 0$. Privzemimo, da se zgornji blok pomika hitreje kot spodnji. Potem velja

$$m\ddot{x} = F_1 - 2kmg + kmg, \quad \ddot{y} = F_2 - kmg.$$

Ker smo privzeli $0 < \dot{x} < \dot{y}$, dobimo od tod pogoj $F_2 > F_1 > kmg$.

Naj bo sedaj $\dot{x} > \dot{y}$. Enačbe gibanja so potem

$$m\ddot{x} = F_1 - 2kmg - kmg, \quad \ddot{y} = F_2 + kmg.$$

Sedaj dobimo $F_2 + 4kmg < F_1$.

Poglejmo še možnost, da se bloka premikata skupaj, $\dot{x} = \dot{y}$. Potem je

$$m\ddot{x} = F_1 - 2kmg + F_0, \quad m\ddot{y} = F_2 - F_0.$$

Tu smo s F_0 označili silo zgornjega bloka na spodnji. Ker se bloka gibljeta skupaj, mora veljati $|F_0| \leq kmg$. Iz enakost $\dot{x} = \dot{y}$ potem sledi $F_2 = F_1 - 2kgm + 2F_0$ in tako

$$\max\{-F_1 + 2kmg, F_1 - 4kgm\} \leq F_2 \leq F_1.$$

2. (a) Postavimo koordinatni sistem, ki se vrti hkrati z vodilom in usmerimo os $\vec{e}_3$ v smer osi rotacije. Vektor kotne hitrosti je potem $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$. Krajevni vektor do materialne točke je $\vec{\zeta} = r(\sin\alpha\vec{e}_1 - \cos\alpha\vec{e}_3)$. Tu smo z $r = r(t)$ zapisali oddaljenost točke do izhodišča. Na točk deluje sila teže $m\vec{g} = -mg\vec{e}_3$ in sila vezi $\vec{S} = S(\cos\alpha\vec{e}_1 + \sin\alpha\vec{e}_3) + S_2\vec{e}_2$. Tu smo upoštevali, da je gibanje po vodilu brez trenja, zato je $\vec{S}$ pravokotna na vodilo. Enačbe gibanja v vektorski obliki so

$$m\vec{a}_{rel} = m\vec{g} + \vec{S} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}.$$

- (b) Komponentni zapis enačb je

$$\begin{aligned} m \sin\alpha \ddot{r} &= m\omega^2 r \sin\alpha + S \cos\alpha, \\ 0 &= -2m\omega \dot{r} \sin\alpha + S_2, \\ -m \cos\alpha \ddot{r} &= -mg + S \sin\alpha. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo s $\sin\alpha$, tretjo s $-\cos\alpha$ in seštejmo. Tako dobimo

$$\ddot{r} - \omega^2 \sin^2\alpha r = g \cos\alpha.$$

Gibanje smo tako reducirali na premočrtno gibanje koordinate r .

(c) Splošna rešitev enačbe je

$$r = A \sinh(\omega \sin \alpha t) + B \cosh(\omega \sin \alpha t) - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

Začetni pogoji $r(t=0) = 0$ in $\dot{r}(t=0) = 0$ pa nam da

$$r = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} (\cosh(\omega \sin \alpha t) - 1).$$

3. (a) Postavimo koordinatni sistem v središče kvadra in usmerimo osi v smeri stranic kvadra. Izračunajmo moment

$$J_{11} = \int_K (y^2 + z^2) \rho dV.$$

Podobne integrale dobimo za J_{22} in J_{33} , za izvendiagonalne pa že vidimo, da so enaki nič. Izračunajmo

$$I_x = \int_K x^2 \rho dV = \rho abc a^2 \int_{-1/2}^{1/2} \xi^2 d\xi \int_{-1/2}^{1/2} d\eta \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta = \frac{1}{12} m a^2.$$

Tu smo vpeljali nove koordinate $x = a\xi$, $y = b\eta$ in $z = c\zeta$. Očitno je

$$I_y = \int_K y^2 \rho dV = \frac{1}{12} m b^2, \quad I_z = \int_K z^2 \rho dV = \frac{1}{12} m c^2$$

in tako

$$J_{11} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2), \quad J_{22} = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2), \quad J_{33} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

- (b) Postavimo sedaj pol v oglišče. Krajevni vektor iz središča kvadra do oglišča je

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}).$$

Po Steinerjevi formuli je

$$\underline{\underline{J}}(P_0) = \underline{\underline{J}}(P_*) + m|\vec{r}|^2 \underline{\underline{I}} - m\vec{r} \otimes \vec{r}.$$

Iskani moment je

$$J = \vec{r} \cdot \underline{\underline{J}}(P_0) \vec{r} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) + \frac{1}{4} m (a^2 + b^2 + c^2) - m(a/2)^2 = \frac{1}{3} m (b^2 + c^2).$$

Tu smo upoštevali, da je $\vec{r} \cdot (\vec{r} \otimes \vec{r}) \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r})^2 = (a/2)^2$.

4. (a) Označimo s x razdaljo središča valja do stropa, z y pa razdaljo središča uteži do stropa, s φ_1 zasuk valja in z φ_2 zasuk škripca. Oba kota usmerimo v nasprotno smer urinega kazalca. Enačbi gibanja valja sta

$$m_1 \ddot{x} = m_1 g - S_1, \quad \frac{1}{2} m_1 a^2 \ddot{\varphi}_1 = a S_1.$$

Tu smo z a zapisali polmer valja, z S_1 pa silo vrvice na valj. Enačba gibanja uteži je

$$m_2 \ddot{y} = m_2 g - S_2,$$

enačba vrtenja škripca pa je

$$\frac{1}{2} m_2 a^2 \ddot{\varphi}_2 = a (S_1 - S_2).$$

Kinematični vezi sta

$$a\dot{\varphi}_2 = -\dot{y}, \quad \dot{x} = a(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2).$$

- (b) Če utež miruje, je $\dot{y} = \dot{\varphi}_2 = 0$. Od tod sledi $S_1 = S_2 = m_2 g$ in $\dot{x} = a\dot{\varphi}_1$. Tako dobimo enačbi

$$\frac{1}{2}m_1\ddot{x} = m_2g, \quad m_1\ddot{x} = m_1g - m_2g.$$

Iz enačb sledi $m_1 = 3m_2$.