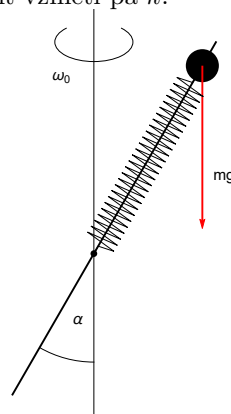
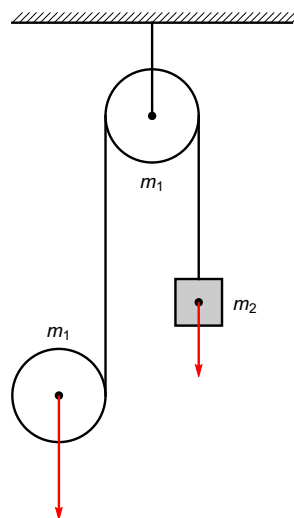


1. Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala $U = U_0(8 \cosh \alpha x - \cosh^2 \alpha x)$.
 - (a) Kvalitativno obravnavaj možna gibanja.
 - (b) Izračunaj periodo harmonične aproksimacije nihanja okoli ravnovesne lege.
2. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0(\pi + \varphi)^4$ z dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 .
 - (a) Določi silo.
 - (b) Izračunaj efektivni potencial.
 - (c) Določi čas v katerem točka pade v center sil iz začetne razdalje $r(t=0) = r_0\pi^4$.
3. Vodilo, ki oklepa kot α z navpičnico se enakomerno s kotno hitrostjo ω_0 vrti okrog navpične osi, po vodilu pa je brez trenja gibljiva materialna točka z maso m , ki je pripeta z vzmetjo tako kot kaže skica. Dolžina neraztegnjene vzmeti je l , koeficient vzmeti pa k .
 - (a) Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati z vodom.
 - (b) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje točke vzdolž vodila.
 - (c) Določi ravnovesni položaj. Kdaj je stabilen?



4. Na valj navijemo vrstico, na drugi konec pritrdimo utež, nato pa vrstico obesimo čez škripec tako kot kaže skica. Valj in škripec, ki imata enak polmer, imata maso m_1 , utež pa m_2 .
 - (a) Zapiši enačbe gibanja.
 - (b) Določi maso uteži tako, da bosta valj in utež padala z enakim pospeškom.



Rešitve

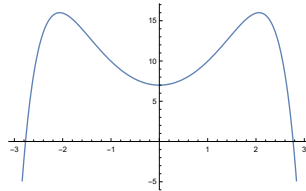
1. (a) Za kvalitativno obravnavo prvo narišemo graf potenciala. Vidimo, da je graf simetričen glede na os y , in da je $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = -\infty$ ter $U(x=0) = 7U_0$. Za majhne vrednosti x prvi člen v $U(x)$ prevaga drugi člen, zato potencial v okolici $x = 0$ narašča, izven okolice pa pada. Sklepamo, da ima funkcija poleg lokalnega minimuma v $x = 0$ še lokalni maksimum. Poiščimo ga. Izračunajmo

$$U'(x) = 2\alpha U_0 (4 - \cosh \alpha x) \sinh \alpha x$$

Stacionarni točki sta $x_1 = 0$ in $x_2 = \pm \operatorname{arccosh} 4$. Drugi odvod je

$$U'' = 2\alpha^2 U_0 (-\sinh^2 \alpha x + (4 - \cosh \alpha x) \cosh \alpha x).$$

Ker je $U''(x_1) = 6\alpha^2 U_0$ in $U''(x_2) = -2\alpha^2 U_0 \sinh^2 \alpha x_2 = -30\alpha^2 U_0$, je $x_1 = 0$ res lokalni minimum, x_2 pa sta lokalna maksimuma.



Slika 1: Skica potenciala za $\alpha = 1$ in $U_0 = 1$.

Za $E_0 > U(x_2) = 16U_0$ je gibanje neomejeno, za $7U_0 < E_0 < 16U_0$ je lahko gibanje omejeno ali neomejeno, za $E_0 < 7U_0$ pa je gibanje ponovno neomejeno.

- (b) Za $E_0 = 7U_0 + \epsilon$, kjer je ϵ majhno pozitivno število, je gibanje omejeno, periodo pa lahko aproksimiramo s harmonično aproksimacijo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(x_1)}} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{3U_0}}.$$

2. (a) Silo določimo z Binetovo enačbo $a = -C_0^2 u^2 (u + u'')$, kjer je $u = 1/r = r_0^{-1}(\pi + \varphi)^{-4}$. Potem

$$u' = -\frac{4}{r_0}(\pi + \varphi)^{-5}, \quad u'' = \frac{20}{r_0}(\pi + \varphi)^{-6}.$$

Upoštevajmo, da je $\pi + \varphi = (r/r_0)^{1/4}$. Od tod sledi

$$u'' = 20 \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{1}{r}$$

in

$$F = ma = -mC_0^2 \left(1 + 20 \sqrt{\frac{r_0}{r}} \right) \frac{1}{r^3} = -mC_0^2 \left(r^{-3} + 20 \sqrt{r_0} r^{-7/2} \right).$$

- (b) Potencial sile je

$$V(r) = - \int_{r_0}^r F dr = -mC_0^2 \left(\frac{1}{2} r^{-2} + 8 \sqrt{r_0} r^{-5/2} \right) + U_0.$$

Efektivni potencial pa je

$$U = \frac{l^2}{2mr^2} + V = \frac{mC_0^2}{2r^2} + V = -8mC_0^2\sqrt{r_0}r^{-5/2}.$$

Vidimo, da točka, ki se giblje proti centru sile pade v center sile.

- (c) Pri $t = 0$ je $r(t = 0) = r_0\pi^4$. Potemtakem $\varphi(t = 0) = 0$. V času T , ko točka pade v center sile je $r(t = T) = 0$ in zato $\varphi(t = T) = -\pi$. Točka se torej giblje v smeri urinega kazalca, zato je $C_0 < 0$. Upoštevajmo, da je plosčinska hitrost konstantna. Potem je $\frac{1}{2}C_0T = A$, kjer je A ploščina

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{-\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r_0^2 \int_0^{-\pi} (\pi + \varphi)^8 = \frac{1}{18} r_0^2 (\pi + \varphi)^9 \Big|_0^{-\pi} = -\frac{1}{18} r_0^2 \pi^9.$$

Čas pada v center sile je potem

$$T = -\frac{1}{9C_0} r_0^2 \pi^9.$$

3. (a) Postavimo koordinatni sistem, ki se vrti hkrati z vodilom in usmerimo os $\vec{e}_3$ v smer osi rotacije. Vektor kotne hitrosti je potem $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$. Krajevni vektor do materialne točke je $\vec{\zeta} = r(\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_3)$. Tu smo z $r = r(t)$ zapisali oddaljenost točke do izhodišča. Na točk deluje sila vezi $\vec{S} = S(-\cos\alpha\vec{e}_1 + \sin\alpha\vec{e}_3) + S_2\vec{e}_2$. Tu smo upoštevali, da je gibanje po vodilu brez trenja, zato je $\vec{S}$ pravokotna na vodilo. Na točko delujeta še sila teže $m\vec{g}$ in sila vzmeti

$$\vec{F} = -k(r - l)(\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_3).$$

Enačba gibanja v vektorski obliki je

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{S} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}.$$

- (b) Komponentni zapis enačb je

$$\begin{aligned} m \sin\alpha \ddot{r} &= -k(r - l) \sin\alpha + m\omega^2 r \sin\alpha - S \cos\alpha, \\ 0 &= -2m\omega \dot{r} \sin\alpha + S_2, \\ m \cos\alpha \ddot{r} &= -k(r - l) \cos\alpha - mg + S \sin\alpha. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo s $\sin\alpha$, tretjo s $\cos\alpha$ in seštejmo. Tako dobimo

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}(r - l) - \omega^2 \sin^2\alpha r = g \cos\alpha.$$

Gibanje smo tako reducirali na premočrtno gibanje koordinate r .

- (c) V ravnovesnem položaju je $\ddot{r} = 0$. Iz zgornje enačbe potem dobimo

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha \right) r = g \cos\alpha + \frac{kl}{m}.$$

Rešitev te enačbe je

$$r = \frac{g \cos\alpha + kl/m}{k/m - \omega^2 \sin^2\alpha}.$$

Dobljeni r določa ravnovesje pri pogoju, da je pozitiven. Tako dobimo pogoj $k/m > \omega^2 \sin^2\alpha$. Pri tem pogoju je ravnovesje tudi stabilno.

4. (a) Označimo s x razdaljo središča valja do stropa, z y pa razdaljo središča uteži do stropa, s φ_1 zasuk valja in z φ_2 zasuk škripca. Oba kota usmerimo v nasprotno smer urinega kazalca. Enačbi gibanja valja sta

$$m_1 \ddot{x} = m_1 g - S_1, \quad \frac{1}{2} m_1 a^2 \ddot{\varphi}_1 = a S_1.$$

Tu smo z a zapisali polmer valja, z S_1 pa silo vrvice na valj. Enačba gibanja uteži je

$$m_2 \ddot{y} = m_2 g - S_2,$$

enačba vrtenja škripca pa je

$$\frac{1}{2} m_1 a^2 \ddot{\varphi}_2 = a(S_1 - S_2).$$

Kinematični vezi sta

$$a\dot{\varphi}_2 = -\dot{y}, \quad \dot{x} = a(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2).$$

- (b) Iz pogoja $\dot{x} = \dot{y}$ sledi $g - S_1/m_1 = g - S_2/m_2$ oziroma $S_1/m_1 = S_2/m_2$. Nadalje iz kinematičnih vezi na vrtenje dobimo $\dot{\varphi}_1 = -2\dot{\varphi}_2$, iz enačb vrtenja pa

$$a\ddot{\varphi}_1 = 2S_1/m_1, \quad a\ddot{\varphi}_2 = 2(S_1/m_1 - S_2/m_1).$$

Združimo enačbi. Dobimo

$$\frac{2S_1}{m_1} = -4 \left(\frac{S_1}{m_1} - \frac{S_2}{m_1} \right).$$

Od tod $3S_1 = 2S_2$ in ker je $S_1/m_1 = S_2/m_2$, sledi

$$m_2 = \frac{3}{2} m_1.$$