

1. Materialna točka z maso m in nabojem q se giblje premočrtno po osi z pod vplivom privlačne električne sile dane z enakomerno porazdeljenim nabojem vzdolž krožnice $x^2 + y^2 = a^2$.

(a) Pokaži, da je električna sila oblike

$$\vec{F} = -\mu_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k},$$

kjer je μ_0 pozitivna konstanta.

(b) Poišči potencial sile in kvalitativno obravnavaj gibanje.

(c) Izračunaj periodo harmonične aproksimacije nihanja okoli ravnovesne lege.

2. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = \frac{r_0}{1+\alpha\varphi}$. Točka je v začetnem trenutku oddaljena od centra sil za $r(t=0) = r_0$ in ima brzino $v_0 = r_0\sqrt{1+\alpha^2}\beta$.

(a) Določi silo, poišči njegov potencial in zapiši pripadajoči efektivni potencial.

(b) Iz začetnih pogojev določi plosčinsko hitrost.

(c) Določi trajektorijo $\varphi = \varphi(t)$.

3. Materialna točka se giblje po gladki logaritemski spirali $r = r_0 e^\theta$, spirala pa se enakomerno vrti okrog osi, ki gre skozi središče spirale in je pravokotna na ravnino spirale. Na materialno točko deluje le sila vezi. V začetnem trenutku je $\theta(t=0) = 0$, točka pa miruje.

(a) Izračunaj dolžino loka spirale.

(b) Zapiši enačbe gibanja v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati s spiralo.

(c) Pomnoži enačbo gibanja z enotskim vektorjem v smeri tangente na spiralo in reši dobljeno enačbo.

4. Homogena polkrogla se vrti okrog navpične stalne osi, ki je v smeri osi simetrije polkrogle, s svojim ravnim delom roba pa pri tem drsi po hrapavi ravni podlagi.

(a) Izračunaj vztrajnostni tenzor polkrogle.

(b) V kolikšnem času začetna kotna hitrost vrtenja ω_0 pade na polovično vrednost, če je koeficient trenja med polkroglo in podlago enak k . Tu upoštevaj, da na element površine dA deluje sila trenja $dF = kmg dA/A$ v nasprotni smeri gibanja.

Rešitve

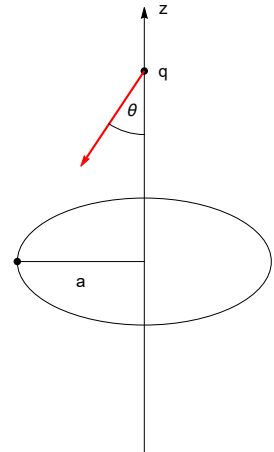
1. (a) Med nabojem q na osi z in infinitezimalnim delom krožnice okoli točke P deluje električna sila

$$d\vec{F} = \frac{kq\sigma}{r^2} \frac{P - P_0}{|P - P_0|},$$

kjer je k Coulombova konstanta, σ gostota naboja na krožnici, P_0 položaj naboja q na osi z in r razdalja $r = |P - P_0|$. Zaradi simetrije deluje rezultanta sil samo v smeri osi z in je enaka

$$\vec{F} = -\frac{kq\sigma 2\pi a}{a^2 + z^2} \cos \theta \vec{k} = -\mu_0 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}.$$

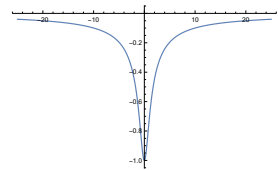
Tu smo označili $\mu_0 = 2\pi a k q \sigma$.



- (b) Potencial je dan z $\vec{F} = -\text{grad } U$. Potem,

$$U = \mu_0 \int_{-\infty}^z \frac{\zeta}{(a^2 + \zeta^2)^{3/2}} d\zeta = -\frac{\mu_0}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Tu smo vzeli $U(-\infty) = 0$. Gibanje je neomejeno za $E_0 \geq 0$ in omejeno za $-\mu_0/a \leq E_0 < 0$. Za $-\mu_0/a < E_0 < 0$ naboj oscilira okrog $z = 0$.



- (c) Perioda harmonične aproksimacije je

$$T = 2\pi \sqrt{m/U''(0)}.$$

Izračunajmo $U''(0)$. Prvi odvod že poznamo, saj je $\text{grad } U = -\vec{F}$. Potem

$$U''(0) = \mu_0 \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \Big|_{z=0} = \mu_0/a^3$$

in

$$T = 2\pi a \sqrt{ma/\mu_0}.$$

2. (a) Uporabili bomo Binetovo enačbo. Pišimo $u = 1/r = \frac{1}{r_0}(1 + \alpha\varphi)$. Potem $u' = \frac{\alpha}{r_0}$ in $u'' = 0$. Sila je potem

$$\vec{F} = -mC_0^2 u^3 \vec{e}_r = mC_0^2 r^{-3} \vec{e}_r.$$

Potencial sile je

$$V = -mC_0^2 \frac{1}{2r^2} = -l^2 \frac{1}{2mr^2}.$$

Efektivni potencial pa je tako

$$U = l^2 \frac{1}{2mr^2} + V = 0.$$

(b) Vektor hitrosti je $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Potem $v = \sqrt{\dot{r}^2 + C_0^2 r^{-2}}$. Nadalje je

$$\dot{r} = -\frac{r_0}{(1 + \alpha\varphi)^2} \alpha\dot{\varphi} = -\frac{\alpha r^2 \dot{\varphi}}{r_0} = -C_0 \frac{\alpha}{r_0}$$

in tako

$$v_0 = v(t=0) = \sqrt{C_0^2 \alpha^2 r_0^{-2} + C_0^2 r_0^{-2}} = \frac{C_0}{r_0} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Upoštevajmo, da je $v_0 = r_0 \sqrt{1 + \alpha^2} \beta$. Tako dobimo $C_0 = \beta r_0^2$.

(c) Velja

$$\dot{\varphi} = \frac{C_0}{r^2} = \frac{r_0^2 \beta}{r^2} (1 + \alpha\varphi)^2 = \beta (1 + \alpha\varphi)^2.$$

Dobili smo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama. Po krajšem računu z upoštevanjem pogoja $\varphi(0) = 0$ dobimo

$$\varphi = \frac{\beta t}{1 - \alpha\beta t}.$$

3. (a) Element ločne dolžine je $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = r_0 \sqrt{2} e^\theta d\theta$ in tako

$$s = \int_0^\theta ds = \sqrt{2} r_0 e^\theta.$$

(b) V RKS, ki se hkrati vrti s spiralo je

$$m(\ddot{s}\vec{e}_t + \kappa \dot{s}^2 \vec{e}_n) = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{S}.$$

Tu je $\vec{\zeta} = r\vec{e}_r$ krajevni vektor do točke na spirali, $\vec{S}$ pa je sila sile vezi, ki deluje v smeri normale $\vec{e}_n$.

(c) Izračunajmo $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) = -r\omega_0^2 \vec{e}_r$ in pomnožimo enčbo skalarno z $\vec{e}_t$. Potem je

$$m\ddot{s} = mr\omega_0^2 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_t.$$

Tu smo upoštevali, da je vektor relativne hitrosti v smeri tangente na tir, zato je skalarni produkt Coriolisove sile s tangento enak nič. Izračunajmo posebej

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_t = \vec{e}_r \cdot (r'\vec{e}_r + r\vec{e}_\theta) \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 1/\sqrt{2}.$$

Tako dobimo

$$\ddot{s} = r_0 e^\theta \omega_0^2 / \sqrt{2} = \frac{1}{2} s_0^2.$$

Splošna rešitev enačbe je

$$s = A \cosh(\omega_0 t / \sqrt{2}) + B \sinh(\omega_0 t / \sqrt{2}).$$

4. (a) Polmer krogle označimo z a . Izračunajmo momente

$$I_x = \int_V x^2 dm = \rho \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = \frac{2}{15} \rho a^5 = \frac{1}{5} m a^2.$$

Zaradi simetrije je $I_y = I_x$, moment I_z pa je

$$I_z = \int_V z^2 dm = \rho \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \cos^2 \theta = \frac{2}{15} \rho a^5 = \frac{1}{5} m a^2.$$

Vztrajnostni tenzor polkrogle s polom na v $P_0(0,0,0)$ je tako digonalen in je enak $\underline{\underline{J}} = \frac{2}{5} m a^2 \underline{\underline{I}}$.

- (b) Enačba gibanja okrog stalne osi je $J_3\ddot{\varphi} = N_3$, kjer je N_3 komponenta navora sile trenja v smeri osi rotacije. Velja $d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} = -\vec{r} \times \frac{mg}{A} \vec{e}_\varphi dA = -\frac{mgr}{A} \vec{k} dA$. Tu je A površina stične ploskve, torej $A = \pi a^2$, dA pa je površinski element. Potem je

$$\vec{N} = -\frac{mg}{A} \vec{k} \int_A r dA = -\frac{mg2\pi}{A} \int_0^a r^2 dr = -\frac{2}{3} mga.$$

Enačba gibanja je tako

$$J_3\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} mga$$

in od tod

$$\ddot{\varphi} = -\frac{5}{3} ag.$$

V začetku je $\varphi(t=0) = \omega_0$. Potem je $\dot{\varphi} = -\frac{5}{3} agt + \omega_0$. Čas v katerem kotna hitrost pade na $\omega_0/2$ je tako

$$t = \frac{3\omega_0}{10ag}.$$