

Prvi izpit iz Matematike 2

8. junij 2020

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

1. naloga (20 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + xy + 3x.$$

- a) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .
- b) Razvij funkcijo f v Taylorjev polinom stopnje 2 okoli točke $(0, 1)$.

Rešitev:

- a) Stacionarni točki sta $(0, -3)$ in $(1, -1)$. Prva ni lokalni ekstrem, druga je pa lokalni maksimum.
- b) $T_2(x, y) = 4x + x^2 + x(y - 1)$

2. naloga (20 točk)

Na polravnini $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ definiramo predpis

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |\ln y_1 - \ln y_2| \quad \text{za} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in (0, \infty).$$

- a) Dokaži, da je d metrika na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.
- b) Skiciraj odprto kroglo $K((0, 1), 1)$ glede na metriko d .

Rešitev:

- a)
- b) Območje med grafi funkcij $y = e^{1-x}$, $y = e^{x-1}$, $y = e^{x+1}$ in $y = e^{-x-1}$.

3. naloga (20 točk)

Za $a, b, x > 0$ definiramo

$$f(a, b, x) = \frac{\arctan(bx) - \arctan(ax)}{x}$$

in

$$I(a, b) = \int_0^\infty f(a, b, x) \, dx.$$

a) Izračunaj $\frac{\partial I}{\partial a}(a, b)$ in $\frac{\partial I}{\partial b}(a, b)$.

Pri tem privzemi kot znano, da integral $I(a, b)$ obstaja za vse $a, b > 0$ in da se da f razširiti do zvezne funkcije na $(0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, \infty)$. Vse ostale korake v dokazu enakosti $\frac{\partial I}{\partial a}(a, b) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a, b, x) \, dx$ natančno utemelji.

b) Izračunaj $I(a, b)$.

Rešitev: $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$

4. naloga (20 točk)

S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F} = (xy^2, x^2y, 0)$ skozi rob območja, podanega z neenačbama

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{in} \quad z^2 \leq x^2 + y^2.$$

Rešitev: $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

5. naloga (20 točk)

S pomočjo izreka o residuih izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 4} dx.$$

Rešitev: $\frac{\pi}{2}$