

1. izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

28. junij 2021

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom $f(x, y) = 6 - 2x^2 - 2y^2$.

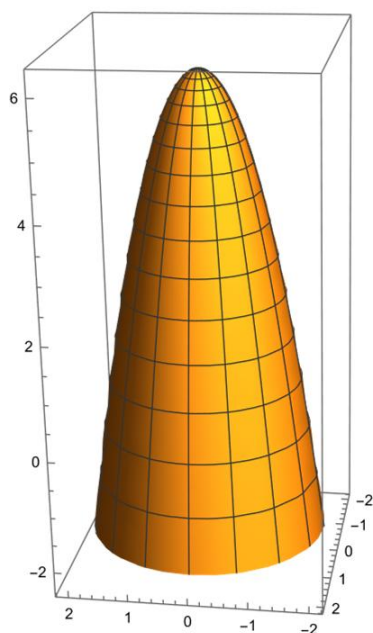
a) Določi zalogo vrednosti in nariši graf funkcije f .

b) Naj bo P rob območja, omejenega s ploskvama z enačbama $z = 0$ in $z = f(x, y)$. Izračunaj površino ploskve P .

c) S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}$ s predpisom $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, 1 - 4xy^2, 2z - z^2)$ navzven skozi P .

Rešitev:

a) $Z_f = (-\infty, 6]$



b) $\frac{69\pi}{4}$

c) -18π

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

- a) Določi definicijsko območje funkcije f .
- b) Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije f .
- c) S pomočjo linearnega približka izračunaj približno vrednost $\sqrt{0.05} + \sqrt{0.99} + \sqrt{0.96}$.

Rešitev:

a) $D_f = [-1, 1] \times [-1, 1]$

b) Največja vrednost je $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{6}$, najmanjša pa $f(\pm 1, \pm 1) = \sqrt{2}$.

3. naloga (25 točk)

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je krivulja $\mathcal{K}_n$ podana s parametrizacijo

$$\vec{r}_n(t) = \left(\sin^2 t, \frac{\sin^n t}{\cos t}, 1 \right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right).$$

a) Določi spremljajoči trieder krivulje $\mathcal{K}_1$ v točki $(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

b) Izračunaj krivuljna integrala vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$ po krivuljah $\mathcal{K}_6$ in $\mathcal{K}_7$ v smeri stran od izhodišča.

Rešitev:

a) $\vec{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), \vec{B} = (0, 0, 1), \vec{N} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)$

b) $\int_{\mathcal{K}_6} \vec{F} d\vec{s} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt = B\left(\frac{1}{2}, 4\right) = \frac{32}{35}$ in $\int_{\mathcal{K}_7} \vec{F} d\vec{s} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) = \frac{35\pi}{128}$

4. naloga (25 točk)

a) Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 2)^2}.$$

Klasificiraj singularnosti funkcije f in določi glavne dele Laurentovih vrst na punktiranih okolicih tistih singularnostih, ki ležijo v zgornji polravnini.

b) S pomočjo izreka o ostankih izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx.$$

Rešitev:

i) Singularnosti sta $1 \pm i$. Glavni del na punktirani okolici $1 + i$ je

$$-\frac{1}{4}(z - 1 - i)^{-2} - \frac{i}{4}(z - 1 - i)^{-1}.$$

ii) $\frac{\pi}{2}$