

1. izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

27. junij 2022

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo dana s predpisom

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

- a) Poišči stacionarne točke funkcije f in ugotovi, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.
- b) Poišči ekstreme funkcije f pri pogoju $x^2 + y^2 = 2x$.

Rešitev:

- a) Stacionarni točki sta $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. Prva je lokalni maksimum, druga pa lokalni minimum.
- b) Maksimum je $f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1}$, minimum pa $f(0, 0) = 0$.

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

a) Funkcijo f razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

b) Dokaži, da je f skrčitev na $[-\pi, \pi]$.

c) Dokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno realno rešitev in jo določi na dve decimalki natančno kot limto zaporedja z rekurzivno formulo $x_{n+1} = f(x_n)$ in ustreznim začetnim členom.

Rešitev:

a) $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{\pi(4n^2-1)} \cos(nx)$

b) $|f'(x)| = \frac{1}{2} |\sin \frac{x}{2}| \leq \frac{1}{2} < 1$

c) 0.90

3. naloga (25 točk)

Za $h > 0$ in $R > 0$ naj bo G valj s polmerom R in višino h , natančneje

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, h]\}.$$

Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (-3x^2, 4y, 5z^2)$ navzven skozi plašč valja G (brez zgornje in spodnje osnovne ploskve).

Rešitev: $4\pi h R^2$

4. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 4z + 5)^2}.$$

a) Klasificiraj singularnosti funkcije f in določi glavne dele Laurentovih vrst na punktiranih okolicah tistih singularnostih, ki ležijo v zgornji polravnini.

b) S pomočjo izreka o ostankih izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

Rešitev:

i) Singularnosti sta $2 \pm i$. Glavni del na punktirani okolici $2 + i$ je

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)(z - 2 - i)^{-2} - \frac{i}{2}(z - 2 - i)^{-1}.$$

ii) π