

Drugi izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

29. junij 2020

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

1. naloga (20 točk)

a) Funkcijo f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & : |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & : \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Pomoč:

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) - \sin(x-y)), \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

b) S pomočjo naloge a) izračunaj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}$.

Rešitev:

$$\text{a) } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx) \quad \text{b) } \frac{\pi-2}{4}$$

2. naloga (20 točk)

Izračunaj trojni integral funkcije f s predpisom

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$$

po telesu T , določenem z neenačbama

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{in} \quad z \geq -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rešitev: $\frac{\pi}{48}$

3. naloga (20 točk)

Določi $a, b \in \mathbb{R}$, za katera je funkcija

$$f_{a,b}(x) = a \cos x + b \sin x$$

najbližja konstantni funkciji 1 glede na metriko d_2 na prostoru $C([0, \frac{\pi}{2}])$.

Pomoč: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Rešitev: $a = b = \frac{4}{\pi+2}$

4. naloga (20 točk)

S pomočjo Stokesovega izreka izračunaj krivuljni integral vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, x + z^2, 6xyz)$$

po robu trikotnika z oglišči $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$ in $C(1, 1, 1)$, ki ga orientiramo v smeri $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$.

Rešitev: 1

5. naloga (20 točk)

Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^4}.$$

a) Funkcijo f razvij v Laurentovo vrsto okoli točke 0, klasificiraj singularnosti funkcije f in določi $\text{Res}(f, 0)$.

b) Izračunaj krivuljni integral funkcije f po krožnici $|z| = 1$, orientirani v pozitivni smeri.

Rešitev:

a) $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} z^{2k}$, točka 0 je edina singularnost in je pol stopnje 2, $\text{Res}(f, 0) = 0$

b) 0