

2. izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

16. avgust 2021

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4}.$$

- a) S pomočjo Banachovega skrčitvenega dokaži, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev na intervalu $[-1, 1]$. To rešitev določi na tri decimalke natančno kot limito zaporedja z rekurzivno formulo $x_{n+1} = f(x_n)$ in ustreznim začetnim členom.
- b) Funkcijo f razvij v sinusno vrsto na intervalu $[0, \pi]$ in skiciraj graf razvoja na celi realni osi.

Rešitev:

a) 0.254

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^n}{n^3} - \frac{\pi^2(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2\pi n} \right) \sin(nx)$

2. naloga (25 točk)

Na telesu, določenemu z neenačbo

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz \leq 6,$$

določi točke, ki so najbolj oddaljene od xy -ravnine.

Rešitev: $(\pm 1, 0, \mp 2)$

3. naloga (25 točk)

S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (-x, -y, z^2)$$

navzven iz ploskve, določene z enačbo

$$9x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Rešitev: $-\frac{8\pi}{9}$

4. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{4z + 2i}{z - 1}.$$

- a) Določi in v kompleksni ravnini nariši množico $f(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$.
- b) Izračunaj $\int_K f(z)^2 dz$, kjer je $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, orientirana pozitivno.

Rešitev:

- a) Območje pod premico $y = 3 - 2x$.
- b) $(-32 + 64i)\pi$