

2. izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

16. avgust 2022

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo dana s predpisom

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 6).$$

- a) Poišči stacionarne točke funkcije f in ugotovi, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.
- b) Poišči ekstreme funkcije f pri pogoju $x^2 + y^2 \leq 9$.

Rešitev:

- a) Stacionarne točke so $(0, \pm\sqrt{6})$ in $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Točki $(0, \pm\sqrt{6})$ nista lokalna ekstrema, točka $(\sqrt{2}, 0)$ je lokalni minimum, točka $(-\sqrt{2}, 0)$ pa lokalni maksimum.
- b) Maksimum je $f(3, 0) = 9$, minimum pa $f(-3, 0) = -9$.

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

- a) Funkcijo f razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 1]$.
- b) Skiciraj graf dobljenega Fourierovega razvoja na $\mathbb{R}$.
- c) S pomočjo dobljenega Fourierovega razvoja izračunaj

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Rešitev:

- a) $\frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi x)$
- b)
- c) $\frac{\pi^2}{8}$

3. naloga (25 točk)

Naj bo P ploskev, določena z neenačbama in enačbo

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad z = -x.$$

a) Izračunaj površino ploskve P .

b) Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje, podano s predpisom

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + 5yz^3, z, y).$$

Izračunaj krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ po krivulji ∂P v pozitivni smeri.

Rešitev:

a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{4}{3}$

4. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}.$$

a) Klasificiraj singularnosti funkcije f in določi glavne dele Laurentovih vrst na punktiranih okolicah tistih singularnostih, ki ležijo v zgornji polravnini.

b) S pomočjo izreka o ostankih izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2} dx.$$

Rešitev:

a) Singularnosti sta $\pm 2i$. Glavni del na punktirani okolici $2i$ je

$$-\frac{e^{-2}}{16} (z - 2i)^{-2} - \frac{3ie^{-2}}{32} (z - 2i)^{-1}.$$

b) $\frac{3\pi e^{-2}}{16}$