

Izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

17. avgust 2020

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

1. naloga (20 točk)

Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije $f(x, y) = x^3 - xy + y^2 - x$ na trikotniku z oglišči $(0, 0)$, $(2, 0)$ in $(0, 2)$.

Rešitev: Največja vrednost je $f(2, 0) = 6$, najmanjša pa $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{13}{27}$.

2. naloga (20 točk)

Na $\mathbb{R}^2$ je podana preslikava $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2|; & x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|; & x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

a) Dokaži, da je $(\mathbb{R}^2, d)$ metrični prostor.

b) Nariši kroglo $\overline{K}((0, 1), 2)$.

c) Ali je množica točk $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ odprta v $(\mathbb{R}^2, d)$?

3. naloga (15 točk)

Telo E je podano z zvezami $x + y + z \leq 2$, $z \geq 0$ in $x^2 + y^2 \leq 1$. Nariši ga in izračunaj integral $\iiint_E x \, dx dy dz$.

Rešitev: $-\frac{\pi}{4}$

4. naloga (30 točk)

Na dva načina, s pomočjo Greenove formule in po definiciji, izračunaj integral vektorskega polja $\vec{F}(x, y) = (yx^2, -x^2)$ po pozitivno orientirani krivulji

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 25, x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, y \in [-5, 5]\}.$$

Rešitev: $\frac{500}{3} - \frac{625\pi}{8}$

5. naloga (15 točk)

Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^4 + 2z^3 + 2z^2}.$$

Izračunaj krivuljni integral funkcije f po pozitivno orientirani krožnici $|z - 1| = 2$.

Rešitev: 0