

2. izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

30. avgust 2021

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = \ln y - x^2 - xy + x - y$$

- Določi definicijsko območje funkcije f .
- S pomočjo Taylorjevega polinoma druge stopnje funkcije f na okolici ustrezne točke približno izračunaj $f(0.1, 0.9)$.
- Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

- $\mathbb{R} \times (0, \infty)$
- -1.005
- Stacionarni točki sta $(-\frac{1}{2}, 2)$ in $(0, 1)$. Prva ni lokalni ekstrem, druga pa je lokalni maksimum.

2. naloga (25 točk)

a) Z uvedbo nove spremenljivke $s = \frac{t^4}{4}$ v integral dokaži, da velja

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-t^4} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

b) Izračunaj krivuljni integral funkcije f s predpisom

$$f(x, y, z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

po krivulji s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad t \in [0, \sqrt{2}].$$

Rezultat izrazi z Gama funkcijo.

Rešitev:

a) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-t^4} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 s^{-\frac{3}{4}} (1-s)^{\frac{1}{2}} ds = \frac{\sqrt{2}}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$

b) $\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{4})}{3\Gamma(\frac{3}{4})}$

3. naloga (25 točk)

S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^4, x^2y, y^2z)$$

navzven skozi rob telesa, ki leži v prvem oktantu in je omejeno s ploskvama z enačbama

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

4. naloga (25 točk)

a) Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4z + 5)^2}.$$

Klasificiraj singularnosti funkcije f in določi glavne dele Laurentovih vrst na punktiranih okolicih tistih singularnostih, ki ležijo v zgornji polravnini.

b) S pomočjo izreka o ostankih izračunaj $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Rešitev:

i) Singularnosti sta $-2 \pm i$. Glavni del na punktirani okolici $-2 + i$ je

$$-\frac{1}{4}(z + 2 - i)^{-2} - \frac{i}{4}(z + 2 - i)^{-1}.$$

ii) $\frac{\pi}{2}$