

3. izpit iz Matematike 2 (MAT-PRA)

29. avgust 2022

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = y^2 - 2xy.$$

- a) Poišči in klasificiraj vse lokalne ekstreme funkcije f .
- b) Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije f pri pogojih $x + y = 3$, $0 \leq x \leq 3$.

Rešitev:

- a) Edina stacionarna točka je $(0, 0)$, ki ni lokalni ekstrem.
- b) Največja vrednost je $f(0, 3) = 9$, najmanjša pa $f(2, 1) = -3$.

2. naloga (25 točk)

Dano je območje

$$P = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

a) Izračunaj prostornino območja P .

b) Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje, podano s predpisom

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz).$$

S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi rob območja P orientiranega z zunanjo normalo.

Rešitev: Rešitev:

a) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{6}$

b) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (y + z + x) dz = \frac{1}{8}$

3. naloga (25 točk)

V ravnini je podana krivulja $\mathcal{K}$ z enačbo in neenačbama

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

a) Dokaži, da je

$$\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$.

b) Dokaži, da je

$$B(a, 1) = \frac{1}{a}$$

za vse $a > 0$.

c) Izračunaj krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ s predpisom

$$\vec{F}(x, y) = (-x^2, y^2)$$

po krivulji $\mathcal{K}$.

Rešitev:

a) Ker je $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$, je $x^{\frac{1}{3}} = \cos t$ in $y^{\frac{1}{3}} = \sin t$ za nek t . Ker je $x, y \geq 0$, je $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) $B(a, 1) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{\Gamma(a)}{a\Gamma(a)} = \frac{1}{a}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^6 t, \sin^6 t) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) dt = 3B\left(\frac{9}{2}, 1\right) = \frac{2}{3}$

4. naloga (25 točk)

Dana je kompleksna funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{(z^2 + 2z + 5)^2}.$$

a) Klasificiraj singularnosti funkcije f in določi glavne dele Laurentovih vrst na punktiranih okolicah tistih singularnostih, ki ležijo v zgornji polravnini.

b) S pomočjo izreka o ostankih izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

Rešitev:

a) Singularnosti sta $1 \pm 2i$. Glavni del na punktirani okolici $1 + 2i$ je

$$\frac{3}{16} (z - 1 - 2i)^{-2} - \frac{5i}{32} (z - 1 - 2i)^{-1}.$$

b) $\frac{5\pi}{16}$