

Prvi kolokvij iz Matematike 2 (PRA-MAT)

27. november 2019

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f .

b) Nariši nivojnici za vrednosti $z = \frac{1}{e}$ in $z = \frac{1}{2}$.

c) Dokaži, da je s predpisom

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

definirana zvezna razširitev funkcije f na $\mathbb{R}^2$.

Rešitev:

a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $Z_f = (0, 1)$

b) Za $z \in (0, 1)$ je enačba nivojnice $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\ln \frac{1}{z}}$, torej je nivojnica krožnica s središčem v $(0, 0)$ in polmerom $\ln \frac{1}{z}$. Za $z = \frac{1}{e}$ je polmer enak 1, za $z = \frac{1}{2}$ pa $\frac{1}{\ln 2}$.

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \downarrow 0} e^{-\frac{1}{r}} = 0$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[5]{1 + y^2}$.

a) Zapiši Taylorjevo vrsto za funkcijo f okoli točke $(1, 0)$.

b) S pomočjo Taylorjevega polinoma druge stopnje izračunaj približno vrednost funkcije f v točki $(1.01, -0.5)$.

c) Izračunaj $\frac{\partial^{2020} f}{\partial x^{2019} \partial y}(1, 0)$ in $\frac{\partial^{2020} f}{\partial x^{2018} \partial y^2}(1, 0)$.

Rešitev:

a) $\sum_{n,m \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} \binom{\frac{1}{5}}{m} (x-1)^n y^{2m}$

b) 1.0549875

c) 0 in $\frac{2}{5} \cdot 2018! \cdot \binom{\frac{1}{2}}{2018} = -\frac{4033!!}{5 \cdot 2^{2017}}$

3. naloga (25 točk)

Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije $f(x, y, z) = e^{x-z}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Rešitev: Stacionarni točki sta $(0, 0, 0)$ in $(-1, 0, 1)$. Prva je lokalni minimum, druga pa ni lokalni ekstrem.

4. naloga (25 točk)

Pošiči tisti kvader z oglišči na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in robovi vzporednimi s koordinatnimi osmi, ki ima največjo površino.

Rešitev: Kocka, katere koordinate oglišč so $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.