

1. kolovij iz Matematike 2 (PRA)

7. december 2020

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x, y) = 1 + e^{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

- Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x, y)$.
- Narišite nivojnice za vrednosti 2, $1 + e$ in $1 + \sqrt{e}$.
- Skicirajte graf funkcije $f(x, y)$.
- Naj bo $z = f(x, y)$, $x = s$ in $y = st^2$. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial t}$ in $\frac{\partial z}{\partial s}$ za $t = 1$ in $s = \frac{1}{2}$.

Rešitev:

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $Z_f = [2, e + 1]$
- Krožnica s središčem $(0, 0)$ in polmerom 1, točka $(0, 0)$, krožnica s središčem $(0, 0)$ in polmerom $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
-
- $-\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}$ in $-\sqrt{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x, y) = 4x^3 - 24y^2 + 96y - 27x$.

- Poiščite in klasificirajte vse lokalne ekstreme funkcije f .
- Poiščite globalne ekstreme funkcije f na območju, ki ga določata neenačbi $x^2 + y^2 - 4y \leq 5$ in $y \geq x$.

Rešitev:

- Stacionarni točki sta $(\frac{3}{2}, 2)$ in $(-\frac{3}{2}, 2)$. Prva ni lokalni ekstrem, druga pa je lokalni maksimum.
- Globalni maksimum je v točki $(-\frac{3}{2}, 2)$, globalni minimum pa v točki $(\frac{1}{2}, 2 + \frac{\sqrt{35}}{2})$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x, y) = y^{14}e^x + \sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x} \cdot y)$.

- a) Določite definicijsko območje.
- b) Razvijte f v Taylorjevo vrsto okrog točke $(0, 0)$.
- c) Izračunajte $\frac{\partial^{14}f}{\partial x^5 \partial y^9}(0, 0)$ in $\frac{\partial^{14}f}{\partial x^7 \partial y^7}(0, 0)$.
- d) S pomočjo linearnega približka izračunajte približno vrednost funkcije f v točki $(0.5, 0.1)$.

a) $D_f = [0, \infty) \times \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n y^{14} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{k+1} y^{2k+1}$

c) $5! = 120$ in 0

d) 0 (če za izhodiščno točko vzamemo $(0, 0)$) ali 0.1 (če za izhodiščno točko vzamemo $(1, 0)$)

4. naloga (25 točk)

Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned} e^{x+w} + xz &= 1 \\ z^3 + y^2 - y &= 8 \end{aligned}$$

- a) Reši sistem enačb na z in w pri $x = 0$ in $y = 1$.
- b) Pokaži, da obstajata taka okolica U točke $(0, 1)$ in taka okolica V rešitve (z, w) iz prejšnje podnaloge, da ima sistem za vse $(x, y) \in U$ enolično rešitev na $(z, w) \in V$. Tako postaneta z in w funkciji spremenljivk x in y : $z = f(x, y)$, $w = g(x, y)$.
- c) Izračunaj parcialne odvode prvega reda funkcij f in g v točki $(0, 1)$.
- d) Približno reši sistem za z in w pri $x = -0.1$ in $y = 1.2$.

Rešitev:

a) $z = 2, w = 0$

b) Izrek o inverzni preslikavi: $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = -12 \neq 0$.

c) $f_x(0, 1) = 0, f_y(0, 1) = -\frac{1}{12}, g_x(0, 1) = -3, g_y(0, 1) = 0$

d) $z = 1.983, w = 0.3$