

1. kolovij iz Matematike 2 (PRA)

8. december 2021

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x, y) = x^3 + 12x^2 - 6xy - 21x + y^2 + 4y$.

a) Poišči in klasificiraj vse lokalne ekstreme funkcije f .

b) Poiščite globalne ekstreme funkcije f na trikotniku z oglišči $(0, 0)$, $(1, 1)$ in $(0, 1)$.

Rešitev:

a) Stacionarni točki sta $(-3, -11)$ in $(1, 1)$. Prva ni lokalni ekstrem, druga pa je lokalni minimum.

b) Največja vrednost je $f(0, 1) = 5$, najmanjša pa $f(1, 1) = -9$.

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x, y) = \frac{\cos x}{1 - y^2}.$$

a) Naj bo T_6 Taylorjev polinom reda 6 funkcije f na okolici točke $(0, 0)$. Določi T_6 .

b) Izračunaj $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}(0, 0)$ in $\frac{\partial^6 f}{\partial y^6}(0, 0)$.

c) S pomočjo T_6 približno izračunaj $f(0.1, -0.1)$.

Rešitev:

a) $T_6(x, y) = -\frac{x^6}{720} + \frac{x^4 y^2}{24} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2 y^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + y^6 + y^4 + y^2 + 1$

b) $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}(0, 0) = 0$ in $\frac{\partial^6 f}{\partial y^6}(0, 0) = 6! = 720$

c) 1.00505

3. naloga (25 točk)

Definiraj funkciji

$$u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) \quad \text{in} \quad v(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$

a) Pokaži, da je

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad u_y = -v_x$$

in sklepaj, da je $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

b) Naj bo $f(u, v)$ funkcija, za katero je $f_{uu} + f_{vv} = 0$. Definiraj sestavljeno funkcijo

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Izračunaj

$$F_{xx} + F_{yy}.$$

Rešitev:

a)

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = 2e^{x^2-y^2} (x \cos(2xy) - y \sin(2xy))$$

in

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y) = 2e^{x^2-y^2} (y \cos(2xy) + x \sin(2xy))$$

Ker sta u in v elementarni, so mešani odvodi u_{xy} , u_{yx} , v_{xy} in v_{yx} zvezne funkcije, zato je $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ in $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$.

b) $F_{xx} + F_{yy} = (f_{xx} + f_{yy}) (u_x^2 + v_x^2) = 0$

4. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2 - 4)^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 - 9.$$

a) Pokaži, da na neki okolici U točke $x_0 = 0$ obstaja takšna funkcija g , da je $g(0) = 2$ in $f(x, g(x)) = 0$ za vse $x \in U$.

b) Pokaži, da ima funkcija g v točki $x_0 = 0$ lokalni ekstrem in ga klasificiraj.

Namig: Izračunaj $g'(0)$ in $g''(0)$.

Rešitev:

a) $f(0, 2) = 0$ in $f_y(0, 2) = 24 \neq 0$. Zaključek sledi iz izreka o implicitni preslikavi.

b) $g'(0) = -\frac{f_x(0,2)}{f_y(0,2)} = 0$ in $g''(0) = -\frac{f_{xx}(0,2)}{f_y(0,2)} = -\frac{1}{2} < 0$, torej je $x_0 = 0$ lokalni maksimum.