

2. kolovij iz Matematike 2 (PRA)

14. februar 2022

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (20 točk)

Dan je integral

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dy.$$

Skiciraj integracijsko območje, zamenjaj vrstni red integracije in izračunaj integral.

Rešitev: $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx = \frac{1}{15}$

2. naloga (25 točk)

Izračunaj trojni integral funkcije f s predpisom $f(x, y, z) = z$ po telesu, določenemu z neenačbo

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z.$$

3. naloga (25 točk)

a) Naj bo $a > 0$. Dokaži, da je

$$\int_0^\infty e^{-ax^3} dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) a^{-\frac{1}{3}}.$$

b) Za $a \geq 0$ definirajmo

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^3}}{x^3} dx.$$

- Dokaži, da je F zvezna funkcija na $[0, \infty)$.

Namig:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-ax^3}}{x^3} dx + \int_1^\infty \frac{1 - e^{-ax^3}}{x^3} dx.$$

- Izračunaj $F'(a)$ za $a > 0$. Pri tem ni potrebno utemeljevati, zakaj lahko menjate vrstni red odvajanja po a in integriranja po x .
- Izračunaj $F(a)$ za $a \geq 0$.

Rešitev:

a) Nova spremenljivka $t = ax^3$.

b) $\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) a^{2/3}$

4. naloga (30 točk)

a) Izračunaj integrala

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \, d\varphi \quad \text{in} \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi$$

tako, da ju najprej izraziš z Beta funkcijo.

b) Izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga omejuje krivulja z enačbo

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4.$$

Rešitev:

a) $2B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$