

## Tretji in četrti kolokvij iz Matematike 2

8. junij 2020

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| Σ |  |

### 1. naloga (20 točk)

Za  $a, b, x > 0$  definiramo

$$f(a, b, x) = \frac{\arctan(bx) - \arctan(ax)}{x}$$

in

$$I(a, b) = \int_0^\infty f(a, b, x) \, dx.$$

a) Izračunaj  $\frac{\partial I}{\partial a}(a, b)$  in  $\frac{\partial I}{\partial b}(a, b)$ .

Pri tem privzemi kot znano, da integral  $I(a, b)$  obstaja za vse  $a, b > 0$  in da se da  $f$  razširiti do zvezne funkcije na  $(0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, \infty)$ . Vse ostale korake v dokazu enakosti

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a, b) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a, b, x) \, dx$$
 natančno utemelji.

b) Izračunaj  $I(a, b)$ .

Rešitev:  $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$

### 2. naloga (20 točk)

Naj bosta  $a, b > 0$ . Z uvedbo ustreznih novih koordinat v dvojnem integralu izračunaj težišče plošče, ki ima gostoto  $\rho(x, y) = x^3 y^4$  in obliko tistega dela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

ki leži v prvem kvadrantu.

Rešitev:  $m = \frac{2a^4 b^5}{315}, T\left(\frac{189\pi}{1024}a, \frac{21}{32}b\right)$

### 3. naloga (20 točk)

Dani so vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \\ z^2 \end{bmatrix},$$

krivulja  $K$ , določena z (ne)enačbami

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

in točki  $A(1, 0, 1)$  ter  $B(0, 1, 0)$ .

a) Po definiciji izračunaj krivuljni integral vektorskega polja  $\vec{F}$  po krivulji  $K$  od točke  $A$  do točke  $B$ .

b) Brez integracije dokaži, da je integral iz a) enak krivuljnemu integralu polja  $\vec{F}$  po daljici od točke  $A$  do točke  $B$ .

Rešitev:

a)  $-\frac{2}{3}$

b) Polje  $\vec{F}$  je potencialno.

**4. naloga (20 točk)**

S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja  $\vec{F} = (xy^2, x^2y, 0)$  skozi rob območja, podanega z neenačbama

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{in} \quad z^2 \leq x^2 + y^2.$$

**Rešitev:**  $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

**5. naloga (20 točk)**

S pomočjo izreka o residuih izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 4} dx.$$

**Rešitev:**  $\frac{\pi}{2}$