

3. kolovij iz Matematike 2 (PRA)

26. april 2022

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

- a) Dokaži, da je f skrčitev na $\mathbb{R}$ in sklepaj, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno realno rešitev.
- b) Realno rešitev enačbe $f(x) = x$ določi na dve decimalki natančno kot limito zaporedja z rekurzivno formulo $x_{n+1} = f(x_n)$ in ustreznim začetnim členom.
- c) Poišči tisti $a \in \mathbb{R}$, za katerega je funkcija g_a s predpisom $g_a(x) = ax$ najmanj oddaljena od funkcije f glede na metriko d_2 na $C[-1, 1]$. Koliko je v tem primeru $d_2(f, g_a)$?

Rešitev:

a) $|f'(x)| = \frac{|x|}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ima supremum $\frac{2\sqrt{3}}{9} < 1$.

b) 0.78

c) $a = 0$, $d_2(f, g_0) = \frac{\pi}{2}$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = x^2 + x.$$

- a) Funkcijo f razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 1]$.
- b) Skiciraj graf Fourierove vrste kot funkcije na $\mathbb{R}$.
- c) S pomočjo Fourierovega razvoja funkcije f izračunaj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Rešitev:

a) $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin(n\pi x)$

b)

c) $\frac{\pi^2}{12}$

3. naloga (25 točk)

Krivulja K je določena z (ne)enačbami

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1, \quad z = -x, \quad x, y \geq 0.$$

- a) Dokaži, da je $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, 2 \sin \varphi, -\cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, parametrizacija krivulje K .
- b) Določi spremljajoči trieder krivulje K v točki $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- c) Izračunaj krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2, yz)$ po krivulji K v pozitivni smeri.

Rešitev:

a)

b) $\vec{T} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\vec{B} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{N} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

c) $\frac{3}{2}$

4. naloga (25 točk)

Ploskev P je dana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = \left(u\sqrt{1-v^2}, uv, \sqrt{1-u^2} \right), \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

- a) Izračunaj Gaussovo ukrivljenost ploskve P v točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- b) Izračunaj ploskovni integral skalarne polja $f(x, y, z) = yz$ po ploskvi P .

Rešitev:

a) 1

b) $\frac{1}{3}$