

4. kolovij iz Matematike 2 (PRA)

9. junij 2022

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (20 točk)

S pomočjo Stokesovega izreka izračunaj krivuljni integral vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + yz, x^2 + y - z, xy)$$

po robu trikotnika z oglišči $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$ in $C(1, 1, 1)$, orientiranega v pozitivni smeri.

2. naloga (25 točk)

S pomočjo Gaussovega izreka izračunaj pretok vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, z^2 - yz)$$

navzven skozi rob telesa, določenega z enačbami

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{in} \quad z \geq 0.$$

3. naloga (30 točk)

Dana je funkcija $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$u(x, y) = e^{x-y} \cos(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Dokaži, da je u realni del neke holomorfne funkcije $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- b) Poišči tisto holomorfno funkcijo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, za katero velja $\Re f = u$ in $f(0) = 1$. Dobljeno funkcijo f izrazi kot funkcijo kompleksne spremenljivke $z = x + iy$.
- c) Naj bo $A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\Re z \leq \Im z \leq \Re z\}$. V kompleksni ravnini nariši množici A in $f(A)$.

Rešitev:

1. $u_{xx} + u_{yy} = -2e^{x-y} \sin(x + y) + 2e^{x-y} \sin(x + y) = 0$
2. $f(z) = e^{(1+i)z}$
3. $f(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$

4. naloga (25 točk)

Dani sta kompleksni funkciji f in g s predpisoma

$$f(z) = \frac{e^z}{z \sin z}, \quad g(z) = \frac{1}{(4z^2 - 1)^2}.$$

- a) Določi singularnosti funkcije f in glavni del Laurentove vrste na punktirani okolici izhodišča.
- b) Določi vse pole za g in določi njihove residue.
- c) Naj bo $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, orientirana v pozitivni smeri. Izračunaj

$$\int_K f(z) \, dz \quad \text{in} \quad \int_K g(z) \, dz.$$

Rešitev:

- a) Singularnosti so $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Glavni del na okolici 0 je $z^{-2} + z^{-1}$.
- b) Pola sta $\frac{1}{2}$ in $-\frac{1}{2}$. Prvi ima residuum $-\frac{1}{8}$, drugi pa $\frac{1}{8}$.
- c) $2\pi i$ in 0