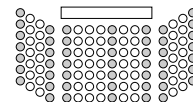


Analiza 3: 1. izpit1. 2. 2019 10⁰⁰

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dan naj bo integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2)}{1 + x^2} dx.$$

- a) Določi konvergenčno območje integrala $I(a)$.
- b) Za $a > 0$ izračunaj odvod $I'(a)$. Preveri enakomerno konvergenco, kjer je to potrebno.
- c) Izračunaj $I(0)$ in od tod $I(a)$ za poljuben $a \in \mathbb{R}$.

Rešitev:

Konvergira pri $a = 0$, ker je $\int_0^1 \ln(x) dx$ konvergenten, pri ∞ pa tudi konvergira za vse $a \in \mathbb{R}$.

Odvod $I'(a) = \int_0^\infty \frac{2a}{(a^2 + x^2)(1 + x^2)} dx = \frac{\pi}{a+1}$ velja za vse $a > 0$, saj imamo enakomerno konvergenco na vseh omejenih intervalih, ki ne vsebujejo ničle.

Torej je $I(a) = \pi \ln(a + 1) + C$ ($a > 0$), pri $a = 0$, pa imamo

$$I(0) = 2 \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx + 2 \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx.$$

V prvi integral vpeljemo novo spremenljivko $u = \frac{1}{x}$ in se ravno odštejeta, torej $I(0) = 0$ in s tem

$$I(a) = \pi \ln(|a| + 1) \quad a \in \mathbb{R}.$$

($I(a)$ je soda funkcija)

2. naloga (25 točk)

Izračunaj vztrajnostni moment homogenega stožca V , danega z

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, H], H^2(x^2 + y^2) \leq R^2 z^2\},$$

okrog x -osi.

Rešitev:

Imamo

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint_V y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz = \text{cilindrične koordinate} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \, dr \int_{\frac{H}{R}r}^H r^2 \sin^2 \varphi + z^2 \, dz = \dots = \frac{H\pi R^2(4H^2 + R^2)}{20}. \end{aligned}$$

3. naloga (25 točk)

Dana naj bo holomorfná funkcija

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

a) Določi definicijsko območje funkcije f .

b) Dana naj bo krivulja $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ parametrizirana z

$$\gamma(t) = (5 \cos t, 10 \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

in orientirana v smeri naraščajočega parametra t . Izračunaj $\oint_{\mathcal{K}} f(z) dz$.

c) Pokaži, da funkcijo

$$g(z) = f(z) - \frac{1}{z} - \frac{1}{z - 2\pi i} - \frac{1}{z + 2\pi i}$$

lahko razširimo do holomorfne funkcije na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 4\pi\}$. Določi glavni del Laurentove vrste funkcije f , ki konvergira za $2\pi < |z| < 4\pi$.

Rešitev:

Funkcija je def. povsod razen v $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Krivulja objame 3 singularnosti, tako da je

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(0) + \text{Res}(2\pi i) + \text{Res}(-2\pi i)) = 2\pi i (1 + 1 + 1)$$

Obstajajo vse tri limite $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)$, $\lim_{z \rightarrow 2\pi i} g(z)$ in $\lim_{z \rightarrow -2\pi i} g(z)$ tako, da g lahko holomorfno razširimo tudi v te tri točke. Pri $z = \pm 4\pi i$ sta naslednji singularnosti funkcije f , tako da je g holomorfná le do tam.

Za glavni del zadošča torej razviti $\frac{1}{z} + \frac{1}{z - 2\pi i} + \frac{1}{z + 2\pi i}$ okoli 0. Prvi člen je že v redu, pri $\frac{1}{z - 2\pi i}$ pa preoblikujemo

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - 2\pi i} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2\pi i}{z}} = \\ &= \frac{1}{z} \left(1 + \left(\frac{2\pi i}{z} \right) + \left(\frac{2\pi i}{z} \right)^2 + \left(\frac{2\pi i}{z} \right)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo $(\mathcal{C}([0, \frac{1}{10}]), d_\infty)$ poln metričen prostor zveznih funkcij na intervalu $[0, \frac{1}{10}]$ s supremum metriko:

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, \frac{1}{10}]} |f(x) - g(x)|.$$

a) Pokaži, da je preslikava $\Phi : (\mathcal{C}([0, \frac{1}{10}]), d_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}([0, \frac{1}{10}]), d_\infty)$ definirana s predpisom

$$\Phi(f)(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{7}{2}x + 4 \int_0^x \left(f(t) - \int_0^t f(\xi) d\xi \right) dt$$

skrčitev.

b) Določi fiksno točko preslikave Φ .

Rešitev:

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &\leq 4 \left| \int_0^x \left(f(t) - g(t) - \int_0^t f(\xi) - g(\xi) d\xi \right) dt \right| \leq \\ &\leq 4 \frac{1}{10} d_\infty(f, g) + 4 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right)^2 d_\infty(f, g) \leq \frac{1}{2} d_\infty(f, g). \end{aligned}$$

Odvajamo in dobimo ravno diferencialno enačbo

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \quad y(0) = y'(0) = 1.$$